# Р Е Ф Е Р А Т

роботи **«Вивчення алгебраїчних структур за властивостями їх природних підструктур»**, поданої Дніпровським національним університетом імені Олеся Гончара на здобуття премії Президента України для молодих вчених 2020 року


**Автори:**

**Пипка Олександр Олександрович** – доктор фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри геометрії і алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

**Ящук Вікторія Сергіївна** – доктор філософії за спеціальністю «Математика», асистент кафедри геометрії і алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.


**Актуальність теми.** Будова будь-якої алгебраїчної структури в значній мірі залежить від її підструктур, зокрема їх розмірів, розташування по відношенню до основного об'єкту, а також взаємодії з іншими підструктурами. Очевидно, що опис важливих природних алгебраїчних структур у загальному випадку вкрай рідко є можливим. Більше того, іноді навіть розгляд деяких частинних випадків є вкрай складним (наприклад, опис скінченних простих груп). Але конкретні задачі потребують не загальної інформації, а опису чи знаходження властивостей даної структури за певних конкретних обмежень. Тому вивчення будови та властивостей різноманітних алгебраїчних об'єктів проводиться зазвичай при певних природних обмеженнях різного характеру та природи. Одними з таких є, наприклад, деякі умови скінченності, які дуже добре зарекомендували себе в теорії груп, кілець та алгебр.

Для більш конкретного висвітлення проблематики, про яку йдеться у роботі доцільно виділити певну алгебраїчну структуру. Почнемо з груп. Одним з найбільш простих з точки зору означення типів груп є абелеві групи, дослідження яких має дуже плідну та багату історію. Існує велика кількість різноманітних узагальнень абелевих груп. Ці узагальнення природним чином виникали під час досліджень, які потребували визначення деяких канонічних рядів у групах. Одним з перших досить широких узагальнень абелевості групи є її розв'язність, яка передбачає існування у групі скінченного нормального ряду підгруп з абелевими факторами. Це узагальнення є одним з перших в теорії груп, воно виникло ще при дослідженні задачі про розв'язність алгебраїчних рівнянь у радикалах, якою займався Е. Галуа (початок XIX ст.). При побудові певного узагальнення завжди виникає природне питання про те, які основні результати в тій або іншій формі можуть бути поширені на більш загальний об'єкт. Але зазвичай у повній мірі цього зробити не можна. Розв'язні групи виявилися дуже широким узагальненням абелевих груп, не наслідуючи при цьому багатьох важливих властивостей. Тому природним виявився пошук такого класу груп, який, по-перше, був би проміжним для класу абелевих та розв'язних груп, а по-друге, унаслідував би більш значну кількість властивостей абелевих груп, ніж розв'язні. Таким виявився клас нільпотентних груп, до яких приводять класичні теореми П. Силова (1872 р.), які вказують на особливу роль примарних підгруп.

Дослідження властивостей нільпотентних груп, а також їх зв'язків з іншими важливими класами груп, продовжується вже багато десятиліть. Ці дослідження мають як загальний характер, так і досить специфічний. Відносно поняття нільпотентності значну частину результатів роботи умовно можна поділити на дві частини. Перша присвячена деяким природним зв'язкам між членами та факторами канонічних рядів груп, а друга – результатам, які пов'язані з вивченням впливу на будову деяких груп певних підгруп, існування яких (у якості власних) в нільпотентних групах неможливе.

Почнемо з першого питання. Якщо $G$ – це нільпотентна група, то існує таке найменше натуральне число $k$, що $G = \zeta_k(G)$, тобто $G / \zeta_k(G) = \langle 1 \rangle$. Добре відомо, що у цьому випадку виконується рівність $\gamma_{k+1}(G) = \langle 1 \rangle$. Враховуючи цей простий факт, логічно з'ясувати, які ще зв'язки можна встановити між фактор-групою $G / \zeta_k(G)$ та підгрупою $\gamma_{k+1}(G)$. Одним з перших фундаментальних результатів у цьому напрямку є результат Р. Бера

(1952 р.), який довів, що зі скінченності $G/\zeta_k(G)$ випливає скінченність $\gamma_{k+1}(G)$. Зокрема, поклавши $k=1$, отримуємо результат Б. Неймана (1951 р.). Інакше кажучи, зі скінченності центральної фактор-групи $G/\zeta(G)$ випливає скінченність комутанта $[G,G]$. Зауважимо, що цей результат Б. Неймана з легкої руки Ф. Холла помилково почали називати «теоремою Шура», хоча сам І. Шур його не одержував. Враховуючи ці два результати, можна сформулювати загальне питання: для яких класів груп $\mathfrak{X}$ із включення $G/\zeta(G)\in\mathfrak{X}$ (відповідно, $G/\zeta_k(G)\in\mathfrak{X}$) випливає, що $[G,G]\in\mathfrak{X}$ (відповідно, $\gamma_{k+1}(G)\in\mathfrak{X}$)? Такі класи груп були названі «класами Шура» та «класами Бера». Значна частина роботи присвячена пошуку нових класів Шура та Бера, а також знаходженню обмежень на деякі числові характеристики (ранги, експоненти та ін.) підгруп $[G,G]$ та $\gamma_{k+1}(G)$.

Інший напрямок досліджень полягає у наступному. Одним з природних узагальнень нільпотентних груп є так звані гіперцентральні групи. Найбільш широким узагальненням теореми Бера на даний момент є такий результат: якщо $Z$ – верхній гіперцентр групи $G$, а фактор-група $G/Z$ скінченна, тоді $G$ містить таку скінченну нормальну підгрупу $L$, що $G/L$ гіперцентральна. Цей результат називають «узагальненою теоремою Бера». У роботі одержано ранговий аналог цього твердження для широкого класу нескінченних груп.

При дослідженні нільпотентних груп та їх узагальнень природно виникає така важлива характеристична підгрупа, як $\mathfrak{X}$-резидуал групи $G$. Відомо, що у загальному випадку $G/G^{\mathfrak{X}}\notin\mathfrak{X}$. Тому питання про те, для яких класів груп $\mathfrak{X}$ має місце включення $G/G^{\mathfrak{X}}\in\mathfrak{X}$, є досить природним. У роботі знайдено деякі класи груп з такою властивістю.

Іншим напрямком досліджень є доведення автоморфних аналогів вище наведених результатів, який було започатковано П. Хегарті (1994 р.). Він довів, що зі скінченності фактор-групи групи $G$ по її абсолютному центру $C_G(\mathrm{Aut}(G))$ випливає скінченність автокомутаторної підгрупи $[G,\mathrm{Aut}(G)]$. Очевидно, що якщо у цьому твердженні замість групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(G)$ покласти групу внутрішніх автоморфізмів $\mathrm{Inn}(G)$, то одержимо теорему

Шура. У роботі при певних природних обмеженнях доведено низку автоморфних аналогів як теореми Шура, так і теореми Бера, які є значними узагальненнями вказаних результатів.

Перейдемо тепер до інших алгебраїчних структур. Добре відомо, що між групами та алгебрами Лі існує певна аналогія у тому сенсі, що для алгебр Лі справджується велика кількість аналогів теоретико-групових результатів і навпаки. Аналогія між результатами для груп, які наведені вище, та алгебрами Лі не стала винятком. Зокрема, з результатів Я. Стюарта (1974 р.) випливають лієвські аналоги теорем Шура та Бера. Для повноти картини у роботі доведені лієвський аналог узагальненої теореми Бера та результати, що пов'язані з резидуалами алгебр Лі.

Аналогічні дослідження проводились і в інших алгебраїчних структурах: модулях, лінійних групах, топологічних групах, $n$-групах, асоціативних алгебрах та $n$-алгебрах Лі. Окрім іншого, внеском авторів у розвиток цієї тематики є розповсюдження аналогів теорем Шура та Бера та інших супроводжуючих результатів ще на дві алгебраїчні структури, а саме кільця Лі та алгебри Лейбніца, які доповнюють наведений перелік.

Перейдемо тепер до ще однієї проблематики, що розглядається у роботі. На сьогодні існує велика кількість критеріїв нільпотентності груп. Цілком логічно, що кожен такий критерій зручно застосовувати, озираючись на характер та специфіку досліджень, що проводяться. Одним з таких критеріїв є наступний: скінченна група нільпотентна тоді й тільки тоді, коли вона не містить власних абнормальних підгруп. Цей дуже простий факт є прикладом саме тієї ситуації, коли наявність лише однієї власної підгрупи з певними властивостями має визначальний вплив на будову групи. Варто відзначити, що абнормальні підгрупи є антиподами нормальних підгруп. Зокрема, підгрупа одночасно може бути двох вказаних типів тоді й тільки тоді, коли вона співпадає з усією групою. Абнормальні підгрупи не є єдиним типом підгруп, які мають протилежні по відношенню до нормальних підгруп властивості. Іншими типами таких підгруп є контранормальні, самонормалізовні та їх природні узагальнення.

Вивчення впливу (узагальнено) нормальних підгруп на будову груп має дуже довгу та плідну історію, яка налічує вже понад 120 років. Дослідження такого характеру були започатковані ще у 1897 році Р. Дедекіндом, який одержав опис скінченних груп, всі підгрупи яких нормальні. Пізніше Р. Бером (1933 р.) цей результат було поширено на нескінченні групи. З іншого боку, результат Р. Дедекінда можна вважати появою такого напрямку досліджень, як вивчення будови груп, всі (власні) підгрупи яких мають лише одну фіксовану властивість. Цей клас задач досить швидко набув популярності серед алгебраїстів. Наприклад, Дж. Міллер та Х. Морено (1903 р.) одержали опис скінченних груп, власні підгрупи яких абелеві, а О.Ю. Шмідт (1924 р.) описав скінченні групи, власні підгрупи яких нільпотентні. Продовжуючи дослідження Р. Дедекінда, О.Ю. Шмідт одержав опис скінченних груп, в яких сукупність всіх підгруп, що не є нормальними, утворює один (1926 р.) або два класи (1938 р.) спряжених підгруп. Ця тематика почала бурхливо розвиватися і стала однією з основних у теорії груп, а до її становлення і розвитку були причетні найбільш відомі алгебраїсти світу.

У межах цієї тематики є ще один клас задач, які виникли значно пізніше у порівнянні з результатами Р. Дедекінда. Для багатьох типів підгруп можна вказати такі підгрупи, властивості який у певному сенсі є діаметрально протилежними по відношенню до вихідних об'єктів. Так, абнормальність антагоністична по відношенню до нормальності. Це спричинило появу такого напрямку досліджень, як вивчення будови груп, кожна підгрупа яких володіє лише однією з протилежних одна одній властивостей. Першим такий підхід реалізував А. Фаттахі (1974 р.), який описав скінченні групи, всі підгрупи яких або нормальні, або абнормальні.

Внесок авторів у розвиток цієї тематики полягає у доведенні нових результатів, присвячених знаходженню будови груп, всі підгрупи яких або одного певного типу, або різних двох. Інакше кажучи, у роботі реалізовано обидва підходи у дослідженнях такого характеру. Варто зауважити, що аналогічний підхід реалізовано також і для алгебр Лейбніца, де такі дослідження до цього часу не проводились взагалі. Зокрема, вперше ініційовано та проведено дослідження будови T-алгебр Лейбніца.

На сьогоднішній день існує велика кількість природних алгебраїчних структур, дослідження в яких проводились із різною інтенсивністю та результативністю. Водночас можна констатувати, що найбільш якісними та ґрунтовними є результати, одержані в межах теорії груп, а також різних типів кілець та алгебр. Як виявилося, пов'язуючи ці структури з деякими важливими математичними об'єктами (функції, решітки та ін.), можна природним чином визначити нові алгебраїчні системи. У роботі, використовуючи такий підхід, було визначено нові алгебраїчні структури, а саме решіткові кільця та решіткові групи, та започатковано дослідження їх властивостей та будови.

Нарешті, відмітимо ще один напрямок досліджень, який вперше було започатковано у даній роботі. Першим кроком у вивченні всіх типів алгебр є опис тих алгебр, які мають малі вимірності. На відміну від більш простих випадків одновимірних і двомірних алгебр Лейбніца, структура тривимірних алгебр Лейбніца значно складніша. Зокрема, вона значно складніша за будову тривимірних алгебр Лі. До цього часу вивчення будови тривимірних алгебр Лейбніца було проведено лише для полів характеристики 0, зокрема для поля комплексних чисел. У роботі вперше було розглянуто протилежну ситуацію, а саме одержано структуру алгебр Лейбніца вимірності 3 над скінченними полями. Як виявилось, ця ситуація значно різноманітніша, ніж у випадку нульової характеристики поля. Зокрема, інколи структура істотно залежить від характеристики поля.

Отже, тематика роботи пов'язана з деякими питаннями, які природним чином виникають у різних алгебраїчних структурах. У межах подібних досліджень багато вітчизняних та закордонних фахівців одержали велику кількість цікавих та важливих результатів, частину з яких авторами було узагальнено у роботі. Той факт, що за останні 15 років кількість наукових публікацій за вказаною тематикою значно збільшилася, вказує на актуальність та перспективність таких досліджень.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконувалась у відповідності з планами наукових досліджень кафедри геометрії і алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара у межах НДР «Дослідження будови груп з обмеженнями на важливі системи підгруп та будови пов'язаних з ними модулів» (0111U001133, 2011-2013 рр.) та «Узагальнено розв'язні групи і модулі над ними та їх застосування до інших алгебраїчних структур» (0115U002395, 2015-2017 рр.).

**Метою роботи** є дослідження будови та властивостей алгебраїчних структур (деяких типів груп, кілець, алгебр та ін.) за певних обмежень різної природи та характеру. **Об'єктами** дослідження є групи, алгебри Лі, кільця Лі, алгебри Лейбніца, решіткові групи та решіткові кільця. **Предметом** дослідження є зв'язки між членами канонічних рядів груп, кілець Лі, алгебр Лі та Лейбніца, властивості решіткових груп і кілець та їх зв'язок з L-фазі групами та L-фазі кільцями, вплив природних систем підгруп на будову скінченних та нескінченних груп, а також вплив природних систем підалгебр на структуру скінченновимірних та нескінченновимірних алгебр Лейбніца. **Методи досліджень**: у роботі використовуються загальноалгебраїчні методи та підходи з використанням основних методів та результатів теорії груп, модулів, кілець та алгебр Лі, алгебр Лейбніца, а також теорії фазі множин.

**Наукова новизна результатів роботи.** У роботі авторами одержано нові наукові результати у межах теорії груп, кілець Лі, алгебр Лі, алгебр Лейбніца та теорії фазі структур. Зокрема: доведено ранговий аналог (для секційного $p$-рангу) теореми Бера для скінченних груп; доведено, що клас локально скінченних груп скінченної експоненти є класом Бера; доведено, що клас локально скінченних груп, силовські $p$-підгрупи яких обмежені (зокрема, скінченні), є класом Шура та класом Бера; доведено, що клас локально скінченних груп, кожна з яких є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої, є класом Шура та класом Бера; доведено ранговий аналог (для секційного $p$-рангу) узагальненої теореми Бера для локально узагальнено радикальних груп; доведено автоморфні аналоги теорем Шура, Бера та Холла для випадку, коли підгрупа групи автоморфізмів, що містить групу внутрішніх автоморфізмів, скінченна; доведено автоморфні аналоги теорем Шура та Бера для випадку, коли підгрупа групи автоморфізмів, що містить групу внутрішніх автоморфізмів, ко-шарово скінченна; доведено автоморфні аналоги теореми Шура для випадків, коли підгрупа групи автоморфізмів, що містить групу внутрішніх автоморфізмів, черніковська, скінченного спеціального рангу, скінченного секційного $p$-рангу; доведено аналог узагальненої теореми Бера для алгебр Лі; доведено аналоги теорем Шура та Бера для кілець Лі; доведено аналоги теорем Шура та Бера для алгебр Лейбніца; встановлено зв'язки між деякими числовими характеристиками (порядок, ранг, експонента та ін.) членів та факторів (узагальнено) центральних рядів груп, кілець Лі, алгебр Лі та алгебр Лейбніца; встановлено зв'язки між членами центральних рядів груп, кілець Лі та алгебр Лі з нільпотентними (гіперцентральними) резидуалами; одержано опис скінченних та деяких нескінченних груп, пронормальні підгрупи яких нормальні або абнормальні; одержано опис деяких нескінченних груп, всі циклічні підгрупи яких самоспряжено-переставні; одержано опис деяких нескінченних груп, всі циклічні підгрупи яких зростаючі або майже самонормалізовні; одержано опис деяких нескінченних груп, всі циклічні підгрупи яких субнормальні або майже самонормалізовні; одержано опис деяких нескінченних груп, всі циклічні підгрупи яких нормальні або майже самонормалізовні; знайдено класи груп, в яких системи наближено пронормальних та пронормальних підгруп співпадають; знайдено класи груп, в яких системи наближено абнормальних та абнормальних підгруп співпадають; запропоновано до розгляду нові типи підгруп – GNA-підгрупи та монопронормальні підгрупи; одержано опис деяких нескінченних груп, всі (або всі циклічні) підгрупи яких є GNA-підгрупами (відповідно, монопронормальними); розв'язано задачу 18.91(a) із всесвітньо відомого збірника нерозв'язаних задач теорії груп «Коурівський зошит» про існування деяких пропереставних підгруп у скінченних групах; одержано опис деяких нескінченновимірних T-алгебр Лейбніца; одержано опис нільпотентних алгебр Лейбніца вимірності 3 над скінченними полями; одержано опис ненільпотентних алгебр Лейбніца вимірності 3 з одновимірним та двовимірним ядром над скінченними полями; одержано опис ненільпотентних циклічних алгебр Лейбніца вимірності 3 над скінченними полями; досліджено властивості деяких специфічних операцій, визначених на множині відображень з довільної групи (кільця) у довільну скінченну дистрибутивну решітку; запропоновано до розгляду нові алгебраїчні структури – решіткові групи та решіткові кільця, та досліджено їх властивості; доведено критерій нормальності для решіткових підгруп; доведено точковий критерій для L-фазі кілець; визначено поняття гомоморфізму решіткових кілець та доведено деякі його властивості; доведено аналог теореми про гомоморфізми для решіткових кілець.

Результати роботи мають інноваційний характер (визначення та дослідження нових типів підгруп, нових алгебраїчних структур) або є аналогами чи узагальненнями класичних результатів всесвітньо відомих алгебраїстів (Ф. Холл, Р. Бер, С.М. Черніков, Б. Нейман, І. Шур, О.Ю. Шмідт, Б.І. Плоткін, Дж. Вайголд, Б. Верфріц, Я. Стюарт та ін.). Тематика, представлена у роботі, охоплює найбільш важливі алгебраїчні структури, перші нетривіальні результати відносно яких датуються ще 1870-1880 рр.

**Подальше застосування результатів роботи.** Результати роботи можуть знайти широке застосування при вивченні різних питань теорії груп, деяких типів кілець та алгебр, а також у межах теорії фазі структур. Найбільш якісними такі застосування будуть при дослідженні різноманітних зв'язків між членами та факторами (узагальнено) центральних рядів, що визначені у зазначених алгебраїчних структурах, при дослідженні будови вказаних алгебраїчних структур за властивостями певних систем їх природних підструктур, а також при подальшому дослідженні будови та властивостей решіткових груп та кілець, яке було вперше започатковане одним з авторів даної роботи.

**Апробація результатів роботи.** Результати роботи було оприлюднено на численних всеукраїнських та міжнародних конференціях та семінарах (Польща, Іспанія, Німеччина).

**Публікації.** Загальна кількість публікацій роботи – 70, у тому числі 1 монографія, 43 статті (зокрема, 18 – у англомовних журналах з імпакт-фактором), 26 тез доповідей. Загальна кількість посилань на публікації авторів / h-індекс роботи згідно баз даних складає відповідно: Web of Science – 27/3; Scopus – 26/3; Google Scholar – 65/4. За результатами роботи авторами захищено дві кандидатські дисертації та одну докторську.

**Короткий зміст роботи.** **Перший розділ** роботи присвячено пошуку нових класів Шура та Бера, а також доведенню автоморфних аналогів цих результатів при певних обмеженнях на групи автоморфізмів. У **другому розділі** проведено дослідження зв'язків між членами та факторами центральних рядів, визначених в алгебрах Лі, алгебрах Лейбніца та кільцях Лі. **Третій розділ** присвячено вивченню впливу різних природних систем підгруп на властивості та будову груп. У **четвертому розділі** наведено результати, присвячені дослідженню будови нескінченновимірних алгебр Лейбніца за властивостями деяких систем підалгебр. **П'ятий розділ** містить результати, які описують будову алгебр Лейбніца вимірності 3 над скінченними полями. **Шостий розділ** присвячено дослідженню нових алгебраїчних структур – решіткових груп та кілець, які були вперше визначені одним з авторів роботи.

Доцент кафедри геометрії і алгебри
Дніпровського національного
університету імені Олеся Гончара,
доктор фізико-математичних наук,
доцент О.О. Пипка

Асистент кафедри геометрії і алгебри
Дніпровського національного
університету імені Олеся Гончара,
доктор філософії за спеціальністю
«Математика» В.С. Ященко