

Національна академія наук України
Інститут математики

РЕФЕРАТ
роботи, висунутої на здобуття
щорічної премії Президента України для молодих вчених
за 2022 рік

**ЕКСТРЕМАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ І АЛГЕБРАЇЧНО-АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ
КОМПЛЕКСНОГО ТА ГІПЕРКОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ**

Денега Ірина Вікторівна,
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
Інститут математики НАН України

Заболотний Ярослав Володимирович,
кандидат фізико-математичних наук,
науковий співробітник,
Інститут математики НАН України

Кліщук Богдан Анатолійович,
кандидат фізико-математичних наук,
науковий співробітник,
Інститут математики НАН України

Шпаківський Віталій Станіславович,
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
Інститут математики НАН України

Актуальність та загальна характеристика роботи

В Україні наукові традиції в комплексному аналізі та теорії потенціалу започатковані в роботах М.О. Лаврентьєва. Йому належать основоположні результати в геометричній теорії функцій, теорії потенціалу, теорії квазіконформних відображень, теорії наближення функцій комплексної змінної, інших розділах комплексного аналізу та його застосувань. Відділ комплексного аналізу та теорії потенціалу є структурною одиницею Інституту математики НАН України, що був створений (точніше, відновлений) у 1989 році для проведення наукових досліджень у напрямках, започаткованих академіком М.О. Лаврентьєвим. Наукові дослідження у цих напрямках були продовжені і розвинені в Інституті математики НАН України в роботах П.М. Тамразова, Ю.Ю. Трохимчука та їх учнів, в результаті чого сформована відома наукова школа з комплексного аналізу. Зокрема, у відділі були проведені систематичні дослідження в теорії екстремальних метрик і квадратичних диференціалів, застосування їх до теорії однолистих функцій і конформних відображень, розв'язані екстремальні проблеми для конформних відображень, пов'язані з мультиполіусними квадратичними диференціалами, була доповнена загальна теорема коефіцієнтів Дж. Дженкінса, були знайдені екстремальні метрики і модулі деяких неорієнтованих ріманових многовидів.

Останнім часом суттєво зросла роль методів комплексного аналізу, теорії потенціалу та теорії відображень як в самій математиці, так і в застосуваннях до розв'язання задач медичної томографії, крайових задач математичної фізики, до нелінійних задач теоретичної та математичної фізики. Зазначимо, що дуже часто при цьому прикладні методи комплексного аналізу та теорії потенціалу відіграють вирішальну роль при побудові аналітичних розв'язків.

Екстремальні задачі на класах голоморфних функцій – це один із найважливіших напрямів геометричної теорії функцій комплексної змінної. Цей напрямок виник наприкінці XIX - на початку XX сторіччя на етапі, коли комплексний аналіз у своєму розвитку сягнув певного рівня і необхідність методів розв'язування екстремальних задач на класах голоморфних функцій стала вкрай нагальною. Такі задачі, зокрема, пов'язані з дослідженням глобальної

структури траєкторій відповідних квадратичних диференціалів, оскільки межі екстремальних областей зазвичай складаються з дуг траєкторій цих квадратичних диференціалів. Детальне вивчення однолистих функцій має багатий науковий інтерес само по собі, а також завжди було багате на застосування: вивчення функцій голоморфних в будь-якій області може бути зведено за допомогою конформного відображення до вивчення функцій в крузі, що зазвичай дуже полегшує задачу.

В геометричній теорії функцій комплексної змінної розроблено багато різних методів дослідження екстремальних задач, зокрема, параметричний метод, варіаційний метод, метод екстремальних метрик, метод симетризації, метод квадратичних диференціалів та інші. На даний час ці методи, а також результати, які вдається з їх допомогою одержати, складають зміст численних монографій та статей. Велику увагу цим методам приділено в роботах Г.М. Голузіна, В.К. Хеймана, Дж. Дженкінса, М.О. Лебедєва, М. Шиффера та Д.К. Спенсера, З. Нехарі, І.О. Александрова, Б.В. Шабата, П.М. Тамразова, В.М. Дубініна, В.Я. Гутлянського та інших. Деякі методи та фундаментальні результати геометричної теорії функцій комплексної змінної знайшли своє застосування в теорії наближення (див., наприклад, роботи М.О. Лаврентьєва, М.В. Келдиша, О.І. Маркушевича, С.М. Мергеляна, В.К. Дзядика, П.М. Тамразова, І.О. Шевчука та інші), топології та геометрії (див., роботи Г.Д. Суворова, Ю.Ю. Трохимчука, В.В. Шарка, Ю.Б. Зелінського та інші). В 1968 році П.М. Тамразов привернув увагу до екстремальних задач, полюси відповідних квадратичних диференціалів яких не фіксовані, а володіють певною "свободою". В 70-80-х р.р. ХХ ст. В.М. Дубінін запропонував декілька методів, серед яких особливої уваги заслуговує метод розділяючого перетворення. Завдяки ньому вдалося розв'язати ряд складних екстремальних задач, які не піддавались розв'язку протягом тривалого часу. У роботах співробітників відділу відбулося істотне послаблення вимог щодо геометрії взаємного розташування вільних полюсів квадратичних диференціалів, які відповідають задачам, що вивчаються, розроблення методу "керуючих" функціоналів, введення поняття променевих систем точок, що дало змогу розширити класи екстремальних задач, для яких отримано повний розв'язок.

Проте, незважаючи на значну кількість досліджень, ряд складних проблем в теорії екстремальних задач про конформні відображення залишаються відкритими. Актуальною є розробка методів та підходів щодо їх розв'язання.

В останнє десятиріччя в роботах багатьох провідних спеціалістів із теорії відображень, таких як К.Астала, Е. Вілламор, С. Водоп'янов, Ф. Герінг, Т. Іванець, П. Коскела, Дж. Манфреді, Дж. Мартін, О.Мартіо, Дж. Оннінен, У. Сребро, С. Хенкл, І. Холопаінен, Е. Якубов та інші, інтенсивно вивчаються так звані відображення зі скінченним спотворенням, характеристики яких не обмежені, а лише скінченні майже скрізь в області задання. Особливе місце тут займають так звані кільцеві Q -відображення, дослідження яких мотивовано кільцевим визначенням квазіконформності за Герінгом. Кільцеві Q -відображення були вперше визначені на площині в зв'язку з вивченням рівнянь Бельтрамі в працях Рязанова-Сребро-Якубова, а потім і в просторі – в працях Рязанова-Севостьянова. Важливим інструментом у дослідженні відображень зі скінченним спотворенням за Іванцем також є нижні Q -відображення, що введені в працях Ковтонюка-Рязанова. В останні роки ці класи відображень також знайшли важливі застосування в теорії крайових задач для рівнянь Бельтрамі, а також в теорії класів Соболева та Орлича-Соболева. Відзначимо, що кільцеві та нижні Q -відображення самі є відображеннями зі скінченним спотворенням у сенсі геометричного визначення. В роботах багатьох провідних іноземних математиків розвивається теорія відображень із скінченним спотворенням по Іванцю. Основні центри вивчення цих відображень зараз знаходяться в США (Ф. Герінг, Е. Вілламор, Дж. Манфреді, Ю. Хейнонен та ін.) і в Фінляндії (К. Астала, П. Коскела, О. Мартіо, І. Холопаінен та ін.).

Гіперкомплексний аналіз як узагальнення класичного комплексного аналізу на функції, що діють у багатовимірних алгебрах дозволяє будувати теорії, подібні до теорії аналітичних функцій комплексної змінної. Активні дослідження в цьому напрямку ведуться у провідних наукових центрах США, Великобританії, Німеччини, Італії, Бельгії, Польщі, Румунії, Португалії, Мексики. Головний метод розвитку некомутативного гіперкомплексного аналізу базується на факторизації диференціальних операторів у вище зазначених алгебрах. На даний час відомі

факторизації операторів Лапласа, Гельмгольца, Клейна-Гордона у алгебрах кватерніонів, антикватерніонів, бікомплексній та кліффордовій. Некомутативний гіперкомплексний аналіз має два серйозні недоліки: гіперголоморфні функції не утворюють функціональну алгебру, що обмежує можливості застосування даних гіперголоморфних функцій; не має чіткої і точної процедури побудови згаданих гіперголоморфних функцій. Природний шлях подолання цих труднощів некомутативного гіперкомплексного аналізу полягає у розгляді комутативних алгебр зі спеціальними базисами, що дають змогу будувати розв'язки заданих диференціальних рівнянь в частинних похідних у вигляді компонент моногенних функцій. Такі розв'язки повністю побудовані для бігармонічного рівняння, яке виникло і застосовується в теорії пружності; побудовано нескінченне сімейство точних розв'язків тривимірного рівняння Лапласа та точні розв'язки одного рівняння гідродинаміки третього порядку.

Є багато робіт присвячених розробці гіперкомплексних методів та їхньому застосуванню до вирішення проблем математичної фізики. Серед них слід відмітити ті, що пов'язані з некомутативними гіперкомплексними числами: Sudbery, Gurlebeck і Sprossig, Kravchenko і Shapiro, Kisil, Colombo, Sabadini і Struppa, Pinotsis та ін. Аналіз в некомутативних алгебрах добре розроблений і має багато застосувань. В цій роботі ми зацікавлені в розгляді комутативних алгебр і розробці технік для їх застосування до вирішення крайових задач. Треба сказати, що такий аналіз є на початковому етапі свого розвитку і деякі результати можуть бути знайдені в роботах Ковальова, Мельниченка, Плакси, Грищука та ін.

Незважаючи на істотний внесок багатьох науковців у розвиток досліджуваних проблем, на сьогодні ще залишається низка важливих відкритих питань. Актуальною задачею є розробка методів та підходів щодо розв'язання як відомих, так і нових проблем дійсного та комплексного аналізів. Проблеми, які розглядаються, актуальні і привертають найсерйознішу увагу фахівців з сучасного комплексного аналізу та його застосування. Частина цих проблем поставлена досить давно і не розв'язана до теперішнього часу, інша частина виникла в процесі розвитку теорії апроксимації, теорії граничних властивостей функцій і теорії конформних відображень. Роботи авторів даного проекту в зазначених

напрямах знаходяться на передовому рівні світової науки, про що свідчать численні запрошення до участі з пленарними та оглядовими доповідями на представницьких міжнародних наукових форумах, гранти для сумісних досліджень та читання лекцій за кордоном, публікації заказних робіт у закордонних ювілейних та інших виданнях, візити до відділу закордонних вчених. Усі одержані результати в рамках пропонованої роботи є новими та не мають вітчизняних та закордонних аналогів такої загальності.

Таким чином, з огляду на сказане, дослідження, проведені у циклі праць, є актуальними та важливими.

Зміст роботи, наукова новизна і цінність результатів роботи

Основною метою роботи «ЕКСТРЕМАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ І АЛГЕБРАЇЧНО-АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО ТА ГІПЕРКОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ» є розв'язання низки актуальних проблем сучасного комплексного аналізу, з акцентом на новітні тенденції та підходи в цій області математики. Дана робота спрямована на розробку питань комплексного аналізу, теорії аналітичних функцій, теорії конформних відображень та їх узагальнень, екстремальних задач теорії аналітичних функцій, варіаційних, симетризаційних, екстремально-метричних методів аналізу та їх застосування до проблем геометричної і конструктивної теорії функцій, до багатовимірного комплексного аналізу, до крайових задач аналітичних функцій комплексної і гіперкомплексної змінної, дослідження диференціальних, локальних, асимптотичних і граничних властивостей, які задовольняють модульні оцінки.

Об'єкти дослідження – функціонали, які задані або на класах однолистих функцій, або на класах відкритих множин розширеної комплексної площини, плоскі і просторові відображення зі скінченим спотворенням, класи диференційовних функцій зі значеннями в асоціативних (комутативних і некомутативних) алгебрах і в нескінченновимірних топологічних векторних просторах.

У рамках даної роботи на базі новітніх фундаментальних досягнень у теорії функцій, комплексному аналізі та теорії відображень досліджено ряд актуальних

проблем про екстремальне розбиття комплексної площини, знайдено нові підходи та методи до розв'язання цих проблем і одержано ряд нових результатів у складних відкритих проблемах, над якими працюють математики в багатьох країнах світу. Отримані результати відкривають нові перспективи для подальшого дослідження цих проблем.

Робота має теоретичний характер. Її результати та методи їх отримання знаходять застосування, насамперед, при вивченні питань комплексного і гіперкомплексного аналізів, голоморфної динаміки, теорії функцій, теорії апроксимації, теорії потенціалу, теорії відображень, в теорії крайових задач для рівнянь математичної фізики, які, в свою чергу, знаходять застосування в гідродинаміці, газодинаміці, теплофізиці, механіці, теоретичній фізиці, томографії та інших прикладних дисциплінах. На основі доведених оцінок можна одержати ряд нових оцінок для функцій, що реалізують конформне відображення кола на області, з деякими спеціальними властивостями. Результати можуть бути застосовані до теорем покриття, теорем спотворення, оцінок коефіцієнтів однолистих функцій. Усі результати є новими та складають суттєве доповнення у розвиток відповідних напрямів комплексного аналізу. Вони доповідалися на різних міжнародних наукових конференціях, школах та наукових семінарах як в Україні так і за її межами.

Основні результати роботи

- розв'язано відкриту проблему про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів двох областей відносно точок одиничного кола на степінь γ внутрішнього радіуса області відносно початку координат при довільному $\gamma \in (0, 2]$ за умови, що всі три області попарно не перетинаються, й доведено узагальнення цього результату (І.В. Денєга);
- одержано ефективні оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей з фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів на (n,m) -променевих системах точок комплексної площини як при будь-яких значеннях степеня $\gamma \in (0, nm]$ внутрішнього радіуса області, що містить нульову точку, так і для степеня $\gamma \in \mathbb{R}^+$ внутрішніх

- радіусів областей відносно початку координат і нескінченно віддаленої точки (І.В. Деніга);
- отримано оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, у випадках, коли полюси відповідних квадратичних диференціалів розміщені на одиничному колі чи на довільній прямій, і в разі, коли області симетричні відносно одиничного кола; встановлено умови, за яких структура точок і областей неістотна; доведені оцінки функціоналів дозволили знайти сильніші результати в точних розв'язках відкритих проблем про екстремальне розбиття комплексної площини (І.В. Деніга, Я.В. Заболотний);
 - отримано нижні оцінки об'єму образу кулі для гомеоморфних відображеннях відносно неконформного модуля в багатовимірному евклідовому просторі (Б.А. Кліщук);
 - досліджено поведінку на нескінченності кільцевих гомеоморфізмів відносно неконформного модуля (Б.А. Кліщук);
 - для регулярних гомеоморфних розв'язків класу Соболева $W^{1,2}_{loc}$ нелінійного рівняння Бельтрамі встановлено асимптотичні оцінки степеневого характеру в термінах нижньої границі. Отримано точні оцінки площі образу круга, та, як наслідок, отримано екстремальний аналог відомої леми Ікоми-Шварца. Побудовано розв'язки, на яких досягаються отримані оцінки. Знайдено достатні умови локальної гелдеровості та скінченної ліпшицевості регулярних гомеоморфних розв'язків нелінійного рівняння Бельтрамі (Б.А. Кліщук);
 - отримано представлення (конструктивний опис) моногенних функцій, визначених в областях спеціальних підпросторів довільної скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри над полем \mathbb{C} , зі значеннями в цій алгебрі за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної (В.С. Шпаківський);
 - доведено аналоги інтегральних теорем (інтегральна теорема Коші для криволінійного і поверхневого інтегралів, інтегральна формула Коші,

- теорема Морера) для моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі (В.С. Шпаківський);
- встановлено зв'язок між моногенними функціями зі значеннями в алгебрах, що утворюють послідовність розширень комутативних алгебр певного класу, й запропоновано підхід до побудови нескінченновимірних сімей розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами за допомогою вказаних моногенних функцій (В.С. Шпаківський);
 - доведено аналоги інтегральних теорем (теорема і формула Коші, теорема Морера) для моногенних функцій зі значеннями в нескінченновимірній комутативній алгебрі і топологічному векторному просторі з комутативним множенням, асоційованих із тривимірним рівнянням Лапласа (В.С. Шпаківський);
 - введено клас кватерніонних G -моногенних відображень і отримано їх представлення (конструктивний опис) за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної. Доведено аналоги інтегральних теорем для відображень цього класу (В.С. Шпаківський);
 - встановлено співвідношення між відомими класами кватерніонних диференційованих функцій і функцій, аналітичних за Хаусдорфом, а також встановлено зв'язок між відомими означеннями похідних і похідною за Хаусдорфом (В.С. Шпаківський);
 - розроблено метод побудови A_1 -гіперголоморфних функцій, що належать ядру оператора Дірака, в узагальнених алгебрах Келі-Діксона (В.С. Шпаківський);
 - перенесено деякі з результатів, отриманих раніше для випадку комплексної площини, на випадок n -вимірного комплексного простору (Я.В. Заболотний).

Публікації результатів роботи та їх цитування

Робота складається з 94 наукових праць, опублікованих у 2013 – 2020 роках, серед яких 62 статті у провідних вітчизняних та міжнародних фахових виданнях

та 32 тези наукових конференцій. У міжнародних журналах опубліковано 41 статтю, з яких 34 статті – в англomовних журналах з імпаkт-фактором. Загальний обсяг статей у журналах – 769 с.

Усі публікації є реферованими. У міжнародній наукометричній базі даних Google Scholar 274 цитувань, h-індекс = 11. У міжнародній наукометричній базі даних SCOPUS зазначено 34 публікації, які мають загалом 89 цитувань та h-індекс =6, у базі даних Web of Science вказано 18 публікацій, які мають загалом 40 цитувань та h-індекс =4.

Старший науковий співробітник
відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу
Інституту математики НАН України
доктор фізико-математичних наук

Ірина ДЕНЕГА

Науковий співробітник
відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу
Інституту математики НАН України
кандидат фізико-математичних наук

Ярослав ЗАБОЛОТНИЙ

Науковий співробітник
відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу
Інституту математики НАН України
кандидат фізико-математичних наук

Богдан КЛІЩУК

Старший науковий співробітник
відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу
Інституту математики НАН України
доктор фізико-математичних наук

Віталій ШПАКІВСЬКИЙ

Учений секретар
Інституту математики НАН України
кандидат фізико-математичних наук

Ігор СОКОЛЕНКО