МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Апріорні оцінки для еволюційних систем

Цикл наукових праць

Анікушин Андрій Валерійович — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Гуляницький Андрій Леонідович — кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Затула Дмитро Васильович — кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

РЕФЕРАТ

Київ — 2019

Дослідження динаміки ряду фізичних, біологічних та інших систем потребує використання нелокальних у часі математичних моделей. Такі моделі, до яких належать, зокрема, інтегро-диференціальні й дробові диференціальні рівняння, дають змогу більш точно описувати еволюцію *ередитарних* систем, або систем з пам'яттю. Ця властивість притаманна середовищам складної структури (тріщинуватим, пористим, насиченим тощо), для яких класичні моделі математичної фізики не є достатньо адекватними.

Проблеми моделювання й оптимізації систем, що описуються рівняннями з частинними похідними, зумовлюють актуальність низки теоретичних досліджень. Наприклад, обґрунтування існування оптимального точкового, імпульсного тощо керування потребує доведення коректності початково-крайових задач для вказаних рівнянь з негладкими правими частинами, тобто теорем слабкої/узагальненої розв'язності. Наближене знаходження цього оптимального керування створює потребу в розробці й обґрунтуванні методів чисельного розв'язання рівнянь з частинними похідними в узагальненій постановці.

Мета роботи

Цикл наукових праць «Апріорні оцінки для еволюційних систем» покликаний здійснити теоретичне дослідження широкого діапазону інтегро-диференціальних рівнянь та рівнянь з дробовою похідною за часом. Усі вони використовуються як математичні моделі дифузії, теплопровідності та інших процесів, які відбуваються у середовищах складної структури.

Методи дослідження

Для доведення теорем розв'язності інтегро-диференціальних рівнянь використовувався метод апріорних нерівностей (abc-метод), для дослідження дробових диференціальних рівнянь — енергетичні оцінки, а для диференціальних рівнянь із випадковою складовою — оцінки розподілів напівнорм Гельдера від випадкових процесів та побудова наближень таких процесів дійснозначними функціями.

Наукова новизна

Одержані авторами результати є новими. Порівняно з класичними дослідженнями у цій галузі, задачі розглядаються з меншими припущенням щодо гладкості правої частини, зокрема за часовою змінною (скажімо, у деяких випадках допускають наявність дельта-функції Дірака) чи випадкових складових. Це не дозволяє використовувати класичні методи і ускладнює процес дослідження.

У роботах циклу узагальнено результати, одержані А.Г. Свешніковим, А.Б. Альшиним, М.О. Корпусовим та Ю.Д. Плетнером в для еліптичних інтегро-диференціальних рівнянь, С.І.Ляшком для параболічних і псевдопараболічних диференціальних рівнянь.

Рівняння змінних порядків, наскільки відомо авторам, на слабку розв'язність раніше не досліджувались.

Авторами одержано такі результати:

1. достатні умови для існування та єдиності узагальненого розв'язку початково-крайової задачі й достатні умови існування оптимального керування для інтегро-диференціального рівняння з невід'ємно визначеним інтегральним оператором, для інтегро-диференціальних рівнянь еліптичного, параболічного, псевдопараболічного та гіперболічного типів, для узагальненого рівняння теплопровідності;
2. для вказаних типів рівнянь розроблено чисельні методу типу Гальоркіна;
3. доведено збіжність методу типу Гальоркіна для дробового за часом (з похідною Капуто) рівняння субдифузії у слабкій постановці. Для самого розв'язку встановлено теорему про неперервність;
4. доведено слабку розв'язність рівняння субдифузії змінного порядку (з похідною Рімана-Ліувілля за часом, порядок якої залежить від просторової змінної);

5. за допомогою обчислювального експерименту з різницевою схемою виявлено нетривіальні властивості розв'язку рівняння змінного порядку; запропоновано і на якісному рівні верифіковано аналогічний метод для рівняння реакції-субдифузії;
6. доведено теореми, у яких отримано оцінки розподілів та модулі неперервності напівнорм Гельдера від випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ та Орліча, визначених на компакті, а також знайдено умови, за яких виконується умова Гельдера для цих процесів;
7. доведено теореми, у яких отримано оцінки розподілів напівнорм Гельдера та модулі неперервності від випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ та $L_p(\Omega)$, визначених на нескінченному проміжку;
8. отримані результати застосовано для побудови точності та надійності наближення процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ та $L_p(\Omega)$, визначених на нескінченному проміжку, за допомогою цілих функцій експоненціального типу;
9. для еволюційних систем із випадковою складовою оцінено останню та отримано теореми про єдиність розв'язку системи.

Практична значимість

Цикл праць має переважно теоретичний характер. Разом з тим, одержані результати необхідні для обґрунтування методів наближеного розв'язування задач оптимального керування й моделювання процесів в ередитарних системах, які описуються розглянутими рівняннями у частинних похідних.

Результати, одержані у працях циклу, впроваджено у навчальний процес факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Опис основних результатів

Розглядатимемо рівняння відносно функції часової й просторових змінних $u = u(x,t)$, де $t \in (0,T)$, $0 < T < \infty$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, де Ω – обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$. Через $f = f(x,t)$ позначатимемо праву частину рівняння, яка моделює зовнішній вплив на систему. Нехай $C_0^\infty(C_T^\infty)$ – множина гладких функцій, що задовольняють крайову умову $u_{\partial\Omega} = 0$ і початкову умову $u|_{t=0} = 0 (u|_{t=T} = 0)$. Через A, B й I нижче позначено еліптичні оператори другого порядку, що діють за просторовими змінними, з достатньо гладкими коефіцієнтами.

1. Розглянемо параболічне інтегро-диференціальне рівняння

$$Lu \equiv \ Au + Iu = f \tag{1}$$

з початковою й крайовою умовами $u|_{t=0} = 0, u_{\partial\Omega} = 0$, де оператор A рівномірно еліптичний. Нехай $W^+(W^+_*)$ (H^+) – поповнення $C^\infty_0(C^\infty_T)$ за нормами $||u||^2_{W^+} = \int_Q u^2_t + \sum_{i=1}^n u^2_{x_i} dQ$, $||u||^2_{H^+} = \int_Q \sum_{i=1}^n u^2_{x_i} dQ$. Крім того, нехай W^-, W^-_* і H^- -– негативні простори, побудовані за $L_2(Q)$ і відповідно W^+, W^+_* і H^+. За наведених припущень, для вказаної задачі одержано такі результати:

Теорема 1. *Для довільного $f \in \ H^-$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1) з простору H^+. Для довільного $f \in \ W^-(W^-_*)$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1) у просторі $L_2(Q)$.*

2. Розглянемо псевдопараболічне інтегро-диференціальне рівняння

$$Lu \equiv \ A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + Bu + Iu = f \tag{2}$$

з початковою й крайовою умовами $u|_{t=0} = 0, u_{\partial\Omega} = 0$, де A, B і K – такі самі лінійні диференціальні оператори, як у параболічному рівнянні, причому A і B рівномірно еліптичні. Нехай $W^+(W^+_*)$ і H^+ - поповнення $C^\infty_0(C^\infty_T)$ за нормами $||u||^2_{W^+} = \int_Q \sum_{i=1}^n u^2_{tx_i} dQ$, $||u||^2_{W^+} = \int_Q \sum_{i=1}^n u^2_{x_i} dQ$, а W^-, W^-_* і H^- – негативні простори, побудовані за $L_2(Q)$ і відповідно W^+, W^+_* і H^+. За певних припущень щодо гладкості конфіцієнтів справедлива

Теорема 2. *Для довільного $f \in \ W^-_*$ існує єдиний узагальнений розв'язок рівняння (2) $u \in H^+$, причому $u \in \ W^+_* \Leftrightarrow f \in \ H^-$.*

Для чисельного розв'язування рівнянь (1) і (2) запропоновано напівдискретні схеми: розв'язок шукається у вигляді $u^m = \sum_{k=1}^m g_k(t)\omega_k(x)$, де $\{\omega_k\}$ – базис у просторі H^+. Невідомі коефіцієнти $g_k(t)$ знаходяться з системи звичайних диференціальних рівнянь, яка одержується шляхом підстановки u^m у (1) або, відповідно, (2). В обох випадках, має місце

Теорема 3. *Нехай $f \in H^-$. Тоді послідовність $\{u^k\}$ збігається до узагальненого розв'язку задачі (1)-(2) слабко в H^+.*

Відзначимо, що завдяки компактності вкладення H^+ в $L_2(Q)$, з теореми 3 випливає сильна збіжність наближених розв'язків до точного в $L_2(Q)$, а усі наведені вище результати легко поширюються на випадок неоднорідної початкової умови $u|_{t=0} = u_0$, якщо $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

3. Розглянемо еліптичну задачу, що узагальнює процеси, що виникають у задачах теорії плазми і лінійної теорії спінових хвиль:

$$Lu = \sum_{i=1}^{3} u_{x_i x_i}(x,t) + \int\limits_0^t K_i(t,\tau) u_{x_i x_i}(x,\tau)\ d\tau = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

На відміну від аналогічних досліджень не вимагатимемо жодної структури ядер, а припустимо лише, що K_i – інтегровані та обмежені. Через W_{BR}^+ позначимо поповнення простору гладких функцій, що задовольняють граничну умову за нормою $||u||^2_{W_{BR}^+} = \int_Q \sum_{i=1}^3 u_{x_i}(x,t)^2 dQ$. Для такої задачі з $F \in W_{BR}^-$ запропоновано означення узагальнених розв'язків, показано їх еквівалентність. Доведено коректність поставленої початково-крайової задачі. Отримані результати узагальнюють теореми доведені А.Г. Свешніковим, А.Б. Альшиним, М.О. Корпусовим та Ю.Д. Плетнером.

4. Розглянемо задачу

$$Lu = u(x,t) - \int\limits_0^t K(t,\tau) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x_i^2} d\tau = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Припустимо, що ядро інтегрального оператора $K(t,\tau) \in L_2([0,T]^2)$ невід'ємно визначене. Через W_{BR}^+ позначимо поповнення простору гладких функцій за нормою $||u||^2_{W_{BR}^+} = \int_Q u^2(x,t)dQ + \sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^t K(t,\tau) u_{x_i}(u,\tau) u_{x_i}(x,t) d\tau\ dQ$. Для вказаної задачі з правою частиною $f \in W^{-}_{BR}$ запропоновано означення узагальнених розв'язків. Показано їх еквівалентність. Доведено коректність постановки відповідної початково-крайової задачі.

Також досліджено задачу оптимального керування $Lu = f + A(h), \quad J(h) = \Phi(u(h)) \to \min$ де $f \in W^{-}_{BR}$, а $h \in U_\partial$ — керування. Тут U_∂ - допустима множина керувань, а $J(h)$ – функціонал, який треба мінімізувати на множині U_∂. Розглядаючи випадок імпульсної дії на систему $A(h) = \sum_{i=1}^{s} \delta(x_1 - x_{1,i}) \otimes \psi_i(x', t)$ доведено теорему існування (узагальненого) оптимального керування і побудовано чисельний метод для знаходження розв'язків задачі та оптимального керування.

5. Для задачі оптимізації гіперболічної системи

$$\mathfrak{A}u + \int\limits_0^t \sum_{i=1}^{n} K_i(t,\tau) u_{x_i x_i}(x,\tau) d\tau = f(t,x;h), \quad ||u(h) - u^*||_S \to \min,$$

де $\mathfrak{A}$ – гіперболічний диференціальний оператор другого порядку, а f -— керуюче відображення, можливо сингулярного характеру, запропоновано нові означення узагальнених розв'язків, показано їх еквівалентність. Доведено, що узагальнений розв'зок завжди існує, показано його єдиність. Запропоновано підхід до побудови чисельного методу типу Гальоркіна та доведено існування оптимального керування відповідно системою.

6. Розглянемо лінійний інтегро-диференціальний рівняння

$$u(x,t) - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^t K(t,\tau) u_{x_i x_i}(x,\tau) + (L_i(x,t,\tau) u(x,\tau))_{x_i} + R(x,t,\tau) u(x,\tau)\, d\tau = f(x,t),$$

що узагальнює відомий оператор теплопровідності. Тут права частина належить деякому негативному простору. Без істотних вимог на невід'ємну визначеність інтегральної частини було показано існування та єдиність узагальнених розв'язків для поставленої задачі. Запропоновано нове означення розв'язку, показано його існування та єдиність. Доведено існування оптимального керування.

7. Окрема частина циклу присвячена дробовим за часом диференціальним рівнянням. Це математичні моделі субдифузії (повільної дифузії), властивої перенесенню зарядів у аморфних напівпровідниках, поширенню речовин у водоносних горизонтах, переміщенню сполук у внутрішньоклітинному й міжклітинному просторі й по клітинних мембранах. Важливою властивістю похідноих Капуто й Рімана-Ліувілля є нелокальність у часі, що дає змогу врахувати у математичній моделі ефекти пам'яті.

Розглянуто задачу

$$^*D_0^\alpha u + Au = f, \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = 0, \ u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

де $^*D_0^\alpha$ — похідна Капуто порядку α за часом з початком у точці 0, $\alpha \in (0, 1)$, оператор A додатно означений.

Відомо, що для довільного $f \in L_p((0,T), H_0^{-1}(\Omega))$ задача (3)-(4) має єдиний розв'язок у просторі $L_p((0,T), H_0^1(\Omega)) \bigcap W_0^{\alpha,p}((0,T), H_0^{-1}(\Omega))$. Одним із результатів циклу є теорема про належність цього розв'язку простору $C([0,T], L_2(\Omega))$. Цей результат дає змогу розглядати ширший клас задач оптимізації розглядуваної дробово-диференціальої системи — наприклад, фінальне керування.

Крім того, обґрунтовано збіжність методу Гальоркіна з дискретизацією за просторовими змінними. Показано, що розв'язок відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь збігається до точного розв'язку слабко в $L_2((0,T), H_0^1(\Omega))$ і *-слабко в $L_\infty((0,T), L_2(\Omega))$.

Інша група результатів стосується більш складної дробово-диференціальної моделі — початково-крайової задачі для рівняння змінного порядку

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(K(x) D_0^{1-\alpha(x)} u) = f, \tag{5}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{6}$$

де порядок похідної Рімана-Ліувілля за часом залежить від змінної x. Це математична модель аномальної дифузії у просторово неоднорідному середовищі.

Для задачі (5)–(6) доведено існування і єдиність слабкого розв'язку у спеціально побудованих соболєвських просторах змінного порядку. Для чисельного розв'язування цієї задачі побудовано гальоркінський (з одночасною дискретизацію за часом і простором) і різницевий методи. Проведено обчислювальний експеримент, який засвідчив, що розв'язок рівняння змінного порядку може мати суттєво інший вигляд, аніж у рівняння субдифузії сталого порядку.

Одержана теорема розв'язності і різницевий метод застосовні й до рівняння реакції-субдифузії вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta\left(K(x)e^{-\theta(x)t}D_0^{1-\alpha(x)}\left(e^{\theta(x)t}u\right)\right) + \theta(x)u = f(x,t)$$

8. Розглянемо випадок еволюційної системи, заданої диференціальним рівнянням із випадковою складовою

$$X'(t) = f(t, X(y)), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha, \tag{7}$$

яка може бути змодельована випадковим процесом. Для отримання результатів щодо існування та розв'язності таких рівнянь потрібно дослідити розподіл відповідного випадкового процесу та побудувати його наближення певною невипадковою функцією.

Досліджено оцінки розподілів негауссових випадкових процесів на компакті та на нескінченному проміжку $[0,\infty)$. Зокрема, розглянуто процеси із банахових просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин, які були вперше введені С.В. Єрмаковим і Є.І. Островським та більш детально досліджені у роботах Ю.В. Козаченка і Ю.Ю. Млавця.

Означення 1. Нехай $\psi(u) > 0$, $u \ge 1$ — деяка монотонно зростаюча функція така, що $\psi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Випадкова величина ξ *належить простору* $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується наступна умова:

$$\sup_{u\ge1} \frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Надалі розглядаються простори $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, які мають наступну властивість.

Означення 2. Нехай ξ_1, ..., ξ_n — випадкові величини з простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$. Позначимо $\eta_n = \max\limits_{1\le k\le n} |\xi_k|$, $a_n = \max\limits_{1\le k\le n} \|\xi_k\|_\psi$. Простір $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ має *властивість* Z, якщо існують монотонно неспадна функція $z(x) > 0$, монотонно зростаюча функція $U(n)$ та дійсне число $x_0 > 0$ такі, що для будь-якої послідовності випадкових величин $(\xi_k,\ k = \overline{1, n})$ з простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $\forall x > x_0$ і для всіх $n \geq 2$ виконується наступна нерівність:

$$\mathsf{P}\{\eta_n > x \cdot a_n \cdot U(n)\} \leq \frac{1}{n} \exp\{-z(x)\}.$$

Для випадкових процесів із просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, які мають властивість Z, а також для процесів із просторів $L_p(\Omega)$ та Орліча отримано оцінки розподілів напівнорм Гельдера та модулі неперервності у випадках, коли процес визначений на компакті або на нескінченному проміжку $[0, \infty)$, тобто оцінки ймовірності

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{\substack{0<\rho(t,s)\leq\varepsilon \\ t,s\in\mathbb{T}}} \frac{|X(t) - X(s)|}{f(\rho(t,s))} > x \right\}.$$

Отримані результати застосовано для побудови наближення процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ та $L_p(\Omega)$, визначених на нескінченному проміжку, із заданими точністю та надійністю за допомогою цілих функцій експоненціального типу, тобто таких функцій f, для яких виконується нерівність $|f(t)| \leq Ae^{B|t|}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, де числа A та B не залежать від t. Відповідно за допомогою цих наближень оцінено випадкову складову у крайовій задачі (7) та отримано теореми про єдиність її розв'язку.

Нехай множина $D = \{(t, y) \,|\, a \leq t \leq b,\ 0 < y < \infty\}$.

Теорема 4. *Розглянемо сепарабельний випадковий процес* $X = \{X(y),\ y \in [0, \infty)\}$ *з банахового простору* $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta \in (0, 1)$. *Припустимо, що для процесу* X *виконується умова:*

$$\sup_{|y_1 - y_2| \leq h} \|X(y_1) - X(y_2)\|_\psi \leq dh^{\varkappa}, \qquad y_1, y_2 \in [0, \infty),\ d, \varkappa > 0,$$

$h \in \left(0, \min\left\{ \sqrt[\varkappa]{\frac{1+\theta}{d}},\ \theta \right\}\right)$. *Оберемо розбиття інтервалу* $[0, \infty)$ *на відрізки* A_i *з довжинами* $\alpha_i, i \geq 0$ *такими, що* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} < \infty$. *Припустимо, що функція* $f(t, y)$ *є неперервною на множині* D. *Тоді крайова задача (7) має єдиний розв'язок* $X(t)$ *для* $a \leq t \leq b$.