МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

**Якісний аналіз і чисельні методи**

**для ередитарних систем**

Цикл наукових праць

Анікушин Андрій Валерійович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Гуляницький Андрій Леонідович – аспірант кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

РЕФЕРАТ

Київ–2016

Дослідження динаміки ряду фізичних, біологічних та інших систем потребує використання нелокальних у часі математичних моделей. Такі моделі, до яких належать, зокрема, інтегро-диференціальні й дробово-диференціальні рівняння, дають змогу більш точно описувати еволюцію *ередитарних* систем, або систем з пам'яттю. Дана властивість притаманна середовищам складної структури (тріщинуватим, пористим, насиченим тощо), для яких класичні моделі математичної фізики не є достатньо адекватними.

Проблеми моделювання й оптимізації систем, що описуються рівняннями з частинними похідними, зумовлюють актуальність низки теоретичних досліджень. Наприклад, обґрунтування існування оптимального точкового, імпульсного тощо керування потребує доведення коректності початково-крайових задач для вказаних рівнянь з негладкими правими частинами, тобто теорем слабкої/узагальненої розв'язності. Наближене знаходження цього оптимального керування створює потребу в розробці й обґрунтуванні методів чисельного розв'язання рівнянь з частинними похідними в узагальненій постановці.

**Мета роботи**

Цикл наукових праць «Якісний аналіз і чисельні методи для ередитарних систем» покликаний здійснити теоретичне дослідження широкого діапазону інтегро-диференціальних рівнянь і рівнянь з дробовою похідною за часом. Усі вони використовуються як математичні моделі дифузії, теплопровідності та інших процесів, які відбуваються у середовищах складної структури.

**Методи дослідження**

Для доведення теорем розв'язності інтегро-диференціальних рівнянь використовувався метод апріорних нерівностей (abc-метод), а для дослідження дробових диференціальних рівнянь – енергетичні оцінки.

У роботах циклу узагальнено результати, одержані А.Г. Свешніковим, А.Б. Альшиним, М.О. Корпусовим та Ю.Д. Плетнером в для еліптичних інтегро-диференціальних рівнянь, С.І.Ляшком для параболічних і псевдопараболічних диференціальних рівнянь. При дослідженні дробового рівняння дифузії використано теорему строгої -розв'язності, одержаної Е.Бажлековою.

**Наукова новизна**

Авторами одержано такі результати:

* достатні умови для існування та єдиності узагальненого розв’язку початково-крайової задачі й достатні умови існування оптимального керування для інтегро-диференціального рівняння з невід’ємно визначеним інтегральним оператором.
* теорема збіжності чисельного методу типу Гальоркіна для пошуку розв’язку інтегро-диференціального рівняння з невід’ємно визначеним інтегральним оператором.
* достатні умови для існування та єдиності узагальненого розв’язку початково-крайової задачі й існування оптимального керування для інтегро-диференціальних рівнянь еліптичного, параболічного та гіперболічного типів.
* достатні умови існування та єдиності узагальненого розв’язку початково-крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння високого порядку з невід’ємно визначеним інтегральним оператором.
* теорема збіжності чисельного методу типу Гальоркіна для пошуку розв’язку інтегро-диференціального рівняння високого порядку з невід’ємно визначеним інтегральним оператором.
* достатні умови для існування та єдиності узагальненого розв’язку початково-крайової задачі, а також достатні умови існування оптимального керування для узагальненого рівняння теплопровідності.
* запропоновано топологічну конструкцію абстрактного узагальненого розв’язку, що узагальнює означення розв’язку, яке використовується в теорії апріорних оцінок. Знайдено достатні умови для існування та єдиності запропонованого розв’язку.
* Установлено зв’язок між апріорними нерівностями та послабленими апріорними нерівностями. Знайдено достатні умови для еквівалентності апріорних нерівностей та послаблених апріорних нерівностей.
* нові необхідні умови діжковості лінійних топологічних просторів та лінійних просторів зі скалярним добутком
* теорема збіжності чисельного методу типу Гальоркіна для розв'язування диференціального рівняння з дробовою похідною у слабкій постановці. Для самого розв'язку встановлено теорему про неперервність.

**Практична значимість**

Цикл праць має переважно теоретичний характер. Разом з тим, одержані результати необхідні для обґрунтування методів наближеного розв'язування задач оптимального керування й моделювання процесів в ередитарних системах, які описуються розглянутими рівняннями у частинних похідних.

Результати, одержані у працях циклу, впроваджено у навчальний процес факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

**Опис основних результатів**

Розглядатимемо рівняння відносно функції часової й просторових змінних , де , , де  – обмежена область з гладкою межею . Через позначатимемо праву частину рівняння, яка моделює зовнішній вплив на систему.

Нехай  () – множина гладких функцій, що задовольняють крайову умову  і початкову умову ().

1. Розглянемо параболічне інтегро-диференціальне рівняння

 (1)

з початковою й крайовою умовами

 (2)

де  й – лінійні диференціальні оператори, що задаються виразами:

,

.

Задачу розглянуто з такими припущеннями: оператор рівномірно еліптичний; функції ,вимірні й обмежені. Нехай () – поповнення () за нормою

,

а  – поповнення  за нормою

.

Крім того, нехай ,і – негативні простори, побудовані за і відповідно ,і .

За наведених припущень, для вказаної задачі одержано такі результати:

**Теорема 1**. Для довільного існує та єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)-(2) з простору .

**Теорема 2**. Для довільного існує та єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)-(2) у просторі .

Для доведення теорем 1 і 2 було перенесено на випадок інтегро-диференціальних рівнянь методику одержання апріорних нерівностей для диференціальних рівнянь. За допомогою оригінального підходу вдалося показати, що інтегральна частина рівняння не впливає (в розумінні аналогії з чисто диференціальними параболічними рівняннями) на гладкість узагальнених розв'язків задачі.

Встановлення узагальненої розв'язності задачі означає, що для неї справедливі й усі теореми імпульсної, точкової, точково-імпульсної тощо керованості, які мають місце для аналогічних диференціальних систем.

Для чисельного розв'язування задачі (1)-(2) запропоновано напівдискретну схему: розв'язок шукається у вигляді , де – базис у просторі . Невідомі коефіцієнти  знаходяться з системи звичайних диференціальних рівнянь, яка одержується шляхом підстановки  у (1).

**Теорема 3**. Нехай . Тоді послідовність збігається до узагальненого розв'язку задачі (1)-(2) слабко в .

**Зауваження 1**. Завдяки компактності вкладення в , з теореми 3 випливає сильна збіжність в наближених розв'язків до точного.

**Зауваження 2**. Усі наведені вище результати легко поширюються на випадок неоднорідної початкової умови , якщо .

2. Розглянемо псевдопараболічне інтегро-диференціальне рівняння

 (3)

з початковою й крайовою умовами

 (4)

де, а , і – лінійні диференціальні оператори, що задаються виразами:

,

,

.

Вимагатимемо рівномірну еліптичність операторів і , неперервну диференційновність коефіцієнтів , неперервність функцій і , а також обмеженість ядер й диференційовність й  за просторовими змінними.

Нехай () – поповнення () за нормою

,

а  – поповнення  за нормою

.

Крім того, нехай ,і – негативні простори, побудовані за і відповідно ,і .

**Теорема 4**. Для довільного існує та єдиний узагальнений розв'язок задачі (3)-(4) з простору , причому тоді й тільки тоді, коли .

Ця теорема, аналог якої справедливий і для спряженого рівняння, одержана як наслідок з апріорних нерівностей (неперервності й коерцитивності оператора). У свою чергу, її наслідком є теореми точної й асимптотичної імпульсної та точково-імпульсної керованості системи.

3. Розглянемо еліптичний лінійний оператор, що узагальнює процеси, що виникають у задачах теорії плазми і лінійної теорії спінових хвиль:



де  – функція, що описує стан системи в області ,  – обмежена область в тривимірному просторі з гладкою межею .

На відміну від аналогічних досліджень не вимагатимемо жодної структури ядер, а припустимо лише, що  – інтегровні та обмежені, тобто  для всіх . Областю визначення оператора  вважатимемо простір нескінченно диференційовних функцій, що задовольняють крайову умову



Через  позначимо поповнення простору гладких функцій, що задовольняють цю умову, за нормою



Для задачі запропоновано означення узагальнених розв’язків, показано їх еквівалентність. Доведено коректність поставленої початково-крайової задачі. Отримані результати узагальнюють теореми, доведені А.Г. Свешніковим, А.Б. Альшиним, М.О. Корпусовим та Ю.Д. Плетнером. Зокрема не вимагається жодної структурної особливості інтегральних складових.

4. Розглянемо лінійний оператор



Припустимо, що ядро інтегрального оператора  невід’ємно визначене. Через  будемо позначати простір нескінченно диференційованих функцій, що задовольняють умову



Через  позначимо поповнення простору  за нормою



Розглянемо задачу

 (5)

Для задачі (5) запропоновано означення узагальнених розв’язків. Показано їх еквівалентність. Доведено коректність постановки відповідної початково-крайової задачі.

Розглянемо задачу оптимального керування. Нехай траєкторія системи описується рівнянням

 (6)

де , а  — керування.

Допустима множина керувань  лежить у просторі  Через  будемо позначати розв’язок задачі (6). На розв’язках рівняння задано функціонал , який треба мінімізувати на множині 

 (7)

де  — функція, що описує бажану траєкторію системи. Розглянемо випадок імпульсної дії на систему



де , а , тобто, , де . Для поставленої задачі оптимального керування доведено теорему існування (узагальненого ) оптимального керування.

**Теорема 5.** Нехай траєкторія системи описується як розв’язок задачі (6) i виконано наступні умови:

1. критерій якості визначається рівністю (7);
2. множина допустимих керувань  замкнена, опукла та обмежена в ;
3. простір керувань ;
4. 

Тоді існує оптимальне керування системою (6).

Побудовано чисельний метод розв’язання задачі (5). Будемо шукати наближений розв’язок у вигляді



де функції  утворюють базис у просторі  і належать простору . Функції  оберемо як розв’язки такої системи



**Теорема 6.** Якщо права частина  задачі (5) належить простору , то послідовність (5) збігається до розв’язку задачі (5) у розумінні норми  При цьому 

**Теорема 7.** Якщо права частина  задачі (5) належить простору , то для довільного числа  такого, що , яке обов’язково існує, послідовність наближень  збігається до розв’язку задачі (5).

5.Розглянемо задачу оптимізації гіперболічної системи



 (8)

 (9)

де  — функція траєкторії системи,  — керування системою,  — банахів простір розв’язків рівняння (8), ,  — керуюче відображення, можливо сингулярного характеру ( належить простору узагальнених функцій). Для розглянутого рівняння запропоновано нові означення узагальнених розв’язків, показано їх еквівалентність. Доведено, що узагальнений розв’зок завжди існує, показано його єдиність. Запропоновано підхід до побудови чисельного методу типу Гальоркіна та доведено існування оптимального керування відповідно системою. Досліджено питання керованості.

6. Значну увагу у циклі робіт присвячено розширенню поняття узагальненого розв’язку операторного рівняння. Зокрема, вводиться нове означення узагальненого розв’язку для абстрактних лінійних операторних рівнянь. Досліджуються його властивості, доведено теореми про існування, єдиність запропонованого розв’зку. Розглянуто його зв’язок з відомими означення. При дослідженні нових типів розв’язків встановлено, що ключову роль може відігравати діжковість простору. Зокрема, про це йдеться при дослідженні зв’язоку між апріорними нерівностями та послабленими апріорними нерівностями. Ці результати можуть бути використані при обґрунтуванні коректності інтегро-диференціальних початково-крайових задач.

**Теорема 8**. Нехай  — діжковий простір, щільно вкладений в і для довільного елемента  виконується нерівність  Тоді норми  i  еквівалентні у тому і лише тому випадку, коли спряжений простір  щільно вкладений у простір .

Ці дослідження продовжено для лінійних просторів з скалярним добутком. Додатково отримано необхідні умови діжковості унітарних просторів.

У циклі робіт розглянуто інтегро-диференціальне рівняння, що узагальнює рівняння теплопровідності.

7. Розглянемо лінійний інтегро-диференціальний оператор



що узагальнює відомий оператор теплопровідності та лінійне рівняння

 (10)

де права частина належить деякому негативному простору. Без істотних вимог на невід’ємну визначеність інтегральної частини було показано існування та єдиність узагальнених розв’язків для поставленої задачі. Запропоновано нове означення розв’язку.

**Означення.** Елемент  називається узагальненим розв'язком рівняння (10) якщо для всіх 



Тут  – деякий спеціальний оператор. Показано існування та єдиність такого розв’язку. Розглянуто задачу (узагальненого) оптимального керування та доведено його існування для керувань з деяких негативних просторів.

8. Заключна частина циклу присвячена дробовому рівнянню субдифузії

 (11)

де – похідна Капуто за змінною порядку з нижньою межею , –рівномірно еліптичний оператор другого порядку, що діє за просторовими змінними.

Рівняння з дробовими за часом похідними набули широкого застосування у природничих науках. Так, вони використовуються для моделювання дифузії у ґрунтах складної структури, перенесення носіїв заряду в аморфних провідниках, дифузії речовин у внутрішньоклітинному просторі тощо. Такі рівняння зазвичай виводяться з випадкових блукань з неперервним часом у припущенні, що розподіл часу очікування має "довгий хвіст". Важливою властивістю похідної Капуто (як і тісно пов'язаної з нею похідної Рімана-Ліувілля) є її нелокальність у часі, що дає змогу врахувати у математичній моделі ефекти пам'яті.

Рівняння (\*) розглядатимемо з початковою і крайовою умовами

 (12)

Відомо, що задача (11)-(12) має єдиний строгий -розв'язок. В одній з робіт циклу додатково доведено, що за умови цей розв'язок належить простору . Цей результат дає змогу розглядати ширший клас задач оптимізації даної дробово-диференціальої системи – наприклад, фінальне керування.

Крім того, обґрунтовано збіжність методу Гальоркіна з дискретизацією за просторовими змінними. Показано, що розв'язок відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь збігається до точного розв'язку слабко у просторі  і \*-слабко у .