НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

РЕФЕРАТ

циклу наукових праць

висунутого на здобуття премії Президента України

для молодих вчених за 2017 рік

ЗАСТОСУВАННЯ НОВИХ ОПЕРАТОРНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПІДХОДІВ ДО ПОБУДОВИ ЕФЕКТИВНИХ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ РОЗВ′ЯЗУВАННЯ СУЧАСНИХ ЗАДАЧ ПРИРОДОЗНАВСТВА

ЛИСЕНКО Лілія Олексіївна
кандидат фізико-математичних наук,
молодший науковий співробітник,
Інститут математики НАН України

РОМАНЮК Наталія Миколаївна
кандидат фізико-математичних наук,
молодший науковий співробітник,
Інститут математики НАН України

СИТНИК Дмитро Олексійович
кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
Інститут математики НАН України

Київ - 2017

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА

Нелокальна задача Коші для диференціального рівняння першого порядку в Банаховому просторі з сильно-позитивним операторним коефіцієнтом і нелокальною умовою у вигляді суми є актуальною математичною моделлю для низки застосувань. Зокрема у задачах теорії пружності та теплопереносу для об'єктів зі складною геометрією чи агресивним середовищем, моделях, що описують циклічні процеси та еволюційні процеси з імпульсним керуванням чи запізненням, задачах економічного моделювання, обернених задачах, тощо. Нелокальна задача такого типу включає в себе низку відомих некласичних постановок, таких як задачі Коші з періодичні умовами та умовами типу Біцадзе–Самарсього. Крім цього згадана нелокальна задача природнім чином виникає в теорії зворотних у часі задач, як результат застосування одного з варіантів методу регуляризації.

Умови існування розв'язку нелокальних задач вивчалася в роботах наступних авторів: А. Дезін (1965, 1980), L. Byszewski (1991), V. Lakshmikantham (1992), S. Ntouyas (1997), А. Скубачевський (1997), С. Гупта і С. Трофімчук (1998), Б. Пташник (2002). Чисельні методи для задач такого виду розглядалися в роботах А. Біцадзе та А. Самарського (1969), Д. Гордезіані (1987), М. Сапоговаса (1984), П. Вабіщевича (1981), Г. Берікелашвілі (1999). У переважній більшості випадків відомі тільки достатні умови існування розв'язку нелокальної задачі. А наявні наближені методи обчислення розв'язку мають ряд недоліків: їм властивий ефект насичення точності, вони мають алгебраїчний порядок збіжності, а їх алгоритмічні реалізації не піддаються розпаралелюванню. Тому розробка чисельних методів для наближення такого розв'язку вільних від згаданих недоліків є актуальною проблемою обчислювальної математики. З поміж різноманіття чисельних методів для подібних задач, доступного в науковій та інженерній літературі, особливе місце займають чисельні методи на основі зображення операторних функцій через інтеграл Данфорда-Коші, завдяки тому що вони зберігають аналітичні властивості точного розв'язку, а їх алгоритмічні реалізації природнім чином адаптовані для багаторівневого розпаралелювання обчислень.

Функціонально–дискретний (FD-) метод, що вперше був запропонований в статті Макарова В. Л. (1991) є представником групи чисельно–аналітичних методів.

Він поєднує в собі простоту та прозорість реалізації, властиву різницевим методам з можливістю послідовного уточнення розв'язку, що типова для ітераційних методів. Завдяки дискретній складовій FD-метод дозволяє досягати збіжності у випадках, коли суто аналітичні методи є розбіжними. Метод може бути застосований до розв'язування операторних рівнянь загального вигляду та дозволяє знаходити розв'язки у вигляді швидкозбіжних функціональних рядів. Для ряду конкретних випадків було доведено, що швидкість його збіжності є суперекспоненціальною і метод позбавлений значної частини недоліків дискретних методів. FD-метод був розвинутий у роботах Макарова В. Л., Гаврилюка І. П., Лазурчака І. І., Россохатої Н. О., Василика В. Б., Драгунова Д. В., Клименка А. В., Бандирського Б. Й., Уханьова О. Л., Попова А. М. та інших. Питання розширення ідеології FD-методу на важливі з прикладної точки зору класи крайових задач та задач на власні значення є актуальною науковою тематикою.

Теорія апроксимацій Паде — локально найкращих раціональних апроксимацій степеневого ряду — становить самостійний напрям в комплексному аналізі та теорії наближень. Інтерес до апроксимацій Паде та більш загальних конструкцій раціональних апроксимацій аналітичних функцій різко зріс у другій половині минулого століття. Завдяки розвитку обчислювальної техніки такі апроксимації знайшли численні застосування в різноманітних задачах математичної фізики, механіки та прикладної математики.

Питанням побудови та дослідження апроксимацій типу Паде функцій багатьох змінних займаються вже понад чотирьох десятків років. Різноманітні модифікації багатовимірних апроксимацій типу Паде розглядалися такими дослідниками як J. S. R. Chisholm, C. H. Lutterodt, R. Hughes Jones, P. R. Graves–Morris, C. Chaffy, D. Levin, P. Guillaume, A. Cuyt, P. B. Borwein, B. Verdonk, K. A. Driver, J. Tan, P. Zhou та ін.

Одним з підходів до побудови та дослідження апроксимант Паде аналітичних функцій є запропонований В. К. Дзядиком у 1981 році метод узагальнених моментних зображень, який дозволив з єдиних позицій розглядати питання, пов'язані з вивченням апроксимант Паде як марковських функцій, так і багатьох важливих спеціальних функцій, що не належать до класу марковських функцій. Так, А. П. Голубом за допомогою методу узагальнених моментних зображень було побудовано та досліджено апроксимації Паде для ряду елементарних та спеціальних функцій однієї змінної, апроксимації Паде–Чебишова та Паде–Ерміта, сумісні та багатоточкові апроксимації Паде. Враховуючи ефективність вказаного підходу до побудови одновимірних апроксимант Паде, актуальним є питання побудови раціональних апроксимацій функцій багатьох змінних за допомогою цього методу. Таким чином, цілком природно постає задача поширення методу узагальнених моментних зображень на d-вимірний випадок.

Основні результати роботи. Нові методи та підходи, викладені у циклі праць, були розроблені в Інституті математики НАН України, у тому числі і авторами циклу. Основні результати досліджень, що визначають їх наукову новизну:

1. Введено поняття багатовимірних узагальнених моментних зображень. Метод узагальнених моментних зображень В. К. Дзядика поширено на випадок багатовимірних числових послідовностей. Встановлено теореми про побудову апроксимацій типу Паде для степеневих рядів двох і більшої кількості змінних.
2. Побудовано та досліджено апроксиманти типу Паде для широких класів спеціальних функцій двох змінних, зокрема, для гіпергеометричних рядів Аппеля $F_1(\nu+1,1,1,\nu+\sigma+2,z,w)$ та $F_3(\nu+1,\sigma+1,1,1,\nu+\sigma+2,z,w)$.
3. Побудовано апроксиманти типу Паде та доведено їх рівномірну збіжність для вироджених гіпергеометричних рядів Гумберта $\Phi_2(1,1,\nu+\sigma+2,z,w)$. Знайдено асимптотичні формули для отриманих апроксимацій.
4. Побудовано апроксиманти типу Паде для класу степеневих рядів двох змінних, до якого, зокрема, належать гіпергеометричні ряди Аппеля $F_3(\sigma+1,\nu+1,1,1,\nu+\sigma+3,z,w)$.
5. Побудовано апроксиманти типу Паде для гіпергеометричних рядів Лаурічелли $F_D^{(3)}(\nu+1,1,1,1,\sigma+\nu+2;z_1,z_2,z_3)$.
6. Для рівняння Шрьодінгера у випадках, коли потенціал є кусково-сталою функцією та коли він належить негативному простору Соболєва, отримано аналітичні оцінки для поправок до власних значень згідно з функціонально-дискретним (FD-) методом, які відносно номера власного значення є непокращуваними за порядком. У випадку потенціалу з негативного простору

Соболєва знайдено достатню умову експоненціальної швидкості збіжності методу.

7. Для рівняння Шрьодінгера з поліноміальним потенціалом здійснено нову алгоритмічну реалізацію FD-методу, яка містить тільки звичайні алгебраїчні операції та не потребує в ході рекурентного процесу розв'язання крайових задач і обчислення інтегралів.
8. FD-метод поширено на задачі Штурма-Ліувілля для рівняння Шрьодінгера з потенціалом, який є похідною від функції обмеженої варіації, що містить скінченну лінійну комбінацію дельта-функцій Дірака, та встановлено достатні умови його експоненціальної швидкості збіжності.
9. Запропоновано та обґрунтовано нову схему алгоритму FD-методу для задач на власні значення в абстрактному формулюванні для лінійних операторів з дискретним спектром, що діють у гільбертовому та банаховому просторах, у випадку базової задачі з власними значеннями довільної кратності. Отримано достатні умови суперекспоненціальної швидкості збіжності запропонованого підходу.
10. Отримано необхідні та достатні умови існування слабкого розв'язку нелокальної за часом задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку в Банаховому просторі з сильно-позитивним операторним коефіцієнтом і нелокальною умовою заданою у вигляді лінійної комбінації розв'язку в різні часові моменти та наведено алгоритм перевірки існування цього розв'язку у випадку конкретної нелокальної умови.
11. Отримано нові достатні умови існування розв'язку нелокальної за часом задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку в Банаховому просторі з сильно-позитивним операторним коефіцієнтом та згаданою нелокальною умовою.
12. Розроблено чисельний метод наближення розв'язку нелокальної задачі Коші для лінійного абстрактного диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом і нелокальною умовою у вигляді суми. Отримано апріорні оцінки похибки розробленого методу, які демонструють його рівномірну експоненціальну збіжність на всьому часовому проміжку включаючи $t = 0$.

13. Отримано умови на оператор, що гарантують двосторонність методу послідовних наближень при чисельному розв'язуванні нелінійного операторного рівняння загального вигляду. Сформульована загальна схема FD-методу для розв'язування такого рівняння.
14. Знайдено умови існування розв'язку базової задачі при застосування FD-методу до нелінійної крайової задачі для диференціального рівняння на відрізку.
15. Доведено теорему про збіжність чисельного розв'язку, отриманого з використанням FD-методу, до точного розв'язку нелінійної крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку на відрізку, та отримано оцінку похибки цього методу.

Апробація результатів роботи. Результати роботи добре відомі фахівцям з обчислювальної математики, теорії функцій, диференціальних рівнянь та теорії операторів як в Україні, так і за кордоном. Вони доповідались та обговорювались на 17 міжнародних наукових конференціях (див. індивідуальні списки публікацій членів колективу).

Структура роботи та цитованість публікацій. Цикл наукових праць „Застосування нових операторно-функціональних підходів до побудови ефективних чисельних методів розв'язування сучасних задач природознавства", що представляється на здобуття премії Президента України для молодих вчених, складається з **27** наукових статей та **1** розділу монографії, опублікованих протягом 2006-2015 років загальним обсягом робіт **509с**. Серед них 9 у міжнародних журналах з імпакт-фактором. Всі наукові статті є реферованими та містяться у міжнародних базах даних, зокрема:

26 статей містяться у базі даних **Google Scholar** і налічують в ній **32** цитування, h-індекси авторів Лисенко Л.О., Романюк Н.М. та Ситника Д.О. відповідно дорівнюють **2**, **1** та **3**,

5 статей містяться у базі даних **SCOPUS** і налічують в ній **4** цитування,h-індекси авторів Лисенко Л.О., Романюк Н.М. та Ситника Д.О. відповідно дорівнюють **0**, **0** та **1**,

10 статей містяться у базі даних **MathSciNet** і налічують в ній **8** цитувань,

17 статей містяться у базі даних **Zentralblatt MATH (zbMATH)**,

27 статей містяться у базі даних **ResearchGate** і налічують в ній **14** цитувань.

Загальна кількість робіт авторів складає **45** наукових праць (серед них **1** розділ монографії, **27** статей та **17** матеріалів конференцій).

ПЕРЕЛІК РОБІТ, ЩО ВИСУВАЮТЬСЯ НА ПРЕМІЮ

1. Василик В. Б., Драгунов Д. В., **Ситник Д. О.** Функціонально-дискретний метод розв'язування операторних рівнянь та його застосування. — Наукова думка, 2011.
2. Василик В. Б., **Ситник Д. О.** Експоненційно збіжний метод для апроксимації інтегралів зі змінною межею інтегрування // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 1. — С. 54–63.
3. Голуб А. П., **Чернецька Л. О**. Багатовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації типу Паде для функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2014. — 66, №9. — С. 1166 – 1174.
4. Голуб А. П., **Чернецька Л. О**. Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде деяких рядів Гумберта // Укр. мат.журн. — 2013. — 65, №10. — С. 1315 – 1331.
5. Голуб А. П., **Чернецька Л. О**. Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. — 2013. — 65, №8. — С. 1035 – 1058.
6. Голуб А. П., **Чернецька Л. О**. Побудова апроксимант Паде для деяких гіпергеометричних рядів Аппеля за допомогою методу узагальнених моментних зображень // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — 10, №1. — С. 69 – 94.
7. Голуб А. П., **Чернецька Л. О**. Побудова апроксимацій Паде для деяких гіпергеометричних рядів Лаурічелли за допомогою методу узагальнених моментних зображень // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — 11, №3. — С. 78 – 103.
8. Макаров В. Л., Василик В. Б., **Ситник Д. О.** Швидкодіючий алгоритм для моделювання динаміки розповсюдження викидів в атмосферу від зосереджених

джерел // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 4. — С. 176–197.

9. Макаров В. Л., Василик В. Б., **Ситник Д. О.** Експоненціально збіжний метод для диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі з необмеженим оператором у нелокальній умові // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 5. — С. 32–45.
10. Функціонально-дискретний метод для нелінійних операторних та диференціальних рівнянь / В. Л. Макаров, І. П. Гаврилюк, Лазурчак І. І., **Д. О. Ситник** // Доповіді НАН України. — 2009. — no. 1. — P. 26–34.
11. Макаров В. Л., **Романюк Н. М.** Нові властивості FD-методу при його застосуваннях до задач Штурма-Ліувілля // Доп. НАН України. – 2014. – № 2. – С. 26–31.
12. Макаров В. Л., **Романюк Н. М.**, Лазурчак І. І. Експериментально-аналітичне дослідження властивостей складових FD-методу при його застосуванні до задач Штурма-Ліувілля // Зб. пр. Інст. матем. НАНУ. – 2013. – Т. 10, № 3. – P. 145-170.
13. Макаров В. Л., **Романюк Н. Н.** Новая реализация FD-метода для случая задачи Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле-Неймана // Тр. Ин-та матем. НАН Белар, 2014. – Т.22, №1. – С. 98–106.
14. Makarov V., **Romaniuk N.**, Lazurchak I. FD-method for solving the Sturm–Liouville problem with potential that is the derivative of a function of bounded variation // J. Comp. Appl. Math., 2014. – Vol. 116, №2. — P. 68–88.
15. Макаров В. Л., **Романюк Н. М.**, Лазурчак І. І. FD-метод для задачі на власні значення з кратними власними значеннями базової задачі // Зб. пр. Ін-ту матем. НАН України, 2014. – Т.11, №4. – С. 239–265.
16. Макаров В. Л., **Романюк Н. М.** FD-метод для задачі на власні значення в гільбертовому просторі у випадку базової задачі з власними значеннями довільної кратності // Доп. НАН України. – 2015. – № 5. – С. 26–35.
17. Макаров В. Л., **Романюк Н. М.** Суперекспоненціальна збіжність FD-методу для спектральної задачі в банаховому просторі // Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2015. – Т.12, №5. – С. 109-131.

18. **Ситник Д. О.** Ефективне використання попередньо обчислених даних у схемі ітеративної sinc–апроксимації // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 4. — С. 266–279.

19. **Ситник Д. О.** Метод ітеративної апроксимації функцій з використанням інтерполянтів у банахових просторах // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 5. — С. 140–159.

20. **Чернецька Л. О.** Тривимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації типу Паде для функцій трьох змінних // Доп. НАН України. — 2014, №7. — С. 36 – 42.

21. **Чернецька Л. О.** Узагальнені моментні зображення та апроксиманти Паде аналітичних функцій від двох змінних // Мат. студії. — 2014. — 41, №2. — С. 201 – 213.

22. A method with a controllable exponential convergence rate for nonlinear differential operator equations / I. P. Gavrilyuk, I. I. Lazurchak, V. L. Makarov, **D. O. Sytnyk** // Comput. Methods Appl. Math. — 2009. — Vol. 9, no. 1. — P. 63–78.

23. An exponentially convergent method for nonlinear operator equations: two-sided approximations and global convergence / I. Gavrilyuk, I. Lazurchak, V. Makarov, **D. Sytnyk** // Computer sciences and telecommunications. — 2009. — no. 4. — P. 31–53.

24. Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., **Romaniuk N. M.** Super-exponentially convergent algorithm for an abstract eigenvalue problem with applications to ODEs // Nonl. Osc. – 2015. – Vol. 18, № 3. – P. 332-356.

25. Exponentially convergent method for the m-point nonlocal problem for a first order differential equation in banach space / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, **D. O. Sytnyk**, V. B. Vasylyk // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 2010. — Vol. 31, no. 1. — P. 1–21.

26. Lazurchak I. I., Makarov V. L., **Sytnyk D.** Two-sided approximations for nonlinear operator equations // Comput. Methods Appl. Math. — 2008. — Vol. 8, no. 4. — P. 386–392.

27. Makarov V. L., **Sytnyk D. O.**, Vasylyk V. B. Existence of the solution to a nonlocal-in-time evolutional problem // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. — 2014. — sep. — Vol. 19, no. 3. — P. 432–447.

28. **Sytnyk D.** Modelling of quantum dots and low dimensional nanostructures as coupled systems // J. Coupled Syst. Multiscale Dyn. — 2014. — dec. — Vol. 2, no. 4. — P. 188–213.

Молодший науковий співробітник
Інституту математики НАН України,
кандидат фізико-математичних наук Л. О. Лисенко

Молодший науковий співробітник
Інституту математики НАН України,
кандидат фізико-математичних наук Н. М. Романюк

Старший науковий співробітник
Інституту математики НАН України,
кандидат фізико-математичних наук Д. О. Ситник

Учений секретар
Інституту математики НАН України,
кандидат фізико-математичних наук І. В. Соколенко