

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

## **Реферат**

до наукової роботи  
**«Стохастичний аналіз та статистичне оцінювання  
для дробових і споріднених процесів»**

на здобуття щорічної премії  
Президента України для молодих вчених

**Ральченко Костянтин Володимирович**  
доктор фізико-математичних наук,  
заступник декана  
механіко-математичного факультету  
Київського національного університету  
імені Тараса Шевченка

КИЇВ – 2020

## Актуальність та загальна характеристика роботи

Роботу присвячено дробовим процесам, які використовуються для моделювання складної поведінки випадкових систем. Прикладами дробових процесів є дробовий броунівський рух, дробовий процес Пуассона та дробові процеси Леві. Вивчаються також мультидробові узагальнення цих процесів та їхні багатопараметричні аналоги – дробові випадкові поля.

Інтенсивний розвиток досліджень з окресленої тематики упродовж останніх років пов'язаний із тим, що багатьом процесам у фізичних системах, радіоелектронних приладах та комп'ютерних мережах притаманна властивість довгострокової (або ж короткострокової) залежності, тобто кореляції випадкового шуму в таких процесах є відмінними від нуля та повільно (або швидко) спадають із часом. Схожі процеси із пам'яттю спостерігаються в гідромеханіці, кліматології, гідрографії, на фінансових ринках тощо. Застосування для моделювання таких систем класичних моделей із вінерівським процесом суттєво обмежене через незалежність його приростів, завдяки чому породжений ним випадковий шум є «білим» (некорельованим). Процеси із пам'яттю зазвичай моделюють математично за допомогою дробового броунівського руху та керованих ним стохастичних диференціальних рівнянь. Цей процес уперше з'явився в роботі А. Колмогорова 1940 року під назвою «спіраль Вінера», а сучасну назву отримав у піонерській статті Б. Мандельброта та Дж. Ван Несса 1968 року, в якій дробовий броунівський рух зображено у вигляді інтегралу за вінерівським процесом та покладено початок побудові стохастичного аналізу для нього. Протягом другої половини ХХ століття цей процес вивчався багатьма дослідниками, зокрема, Б. Мандельбротом, Г. М. Молчаном, Ю. І. Голосовим, М. Такку. Значний інтерес до дослідження дробового броунівського руху виник наприкінці 90-х років, що пов'язано із його застосуваннями у фінансах, телекомунікаціях та інших галузях. З'явилося багато статей, присвячених стохастичному аналізу для цього процесу, серед яких роботи Л. Декресфонда, Т. Лайонса, Ю. С. Мішури, Д. Нуаларта, Б. Оксендала, М. Целе та інших.

Дробовий броунівський рух має властивості стаціонарності приростів та самоподібності, що приводить до незмінної в часі регулярності траєкторій і «глибини пам'яті», які визначаються параметром Хюрста. Це накладає обмеження на його застосування до моделювання фізичних і фінансових процесів, для яких ці характеристики не є сталими. У зв'язку з цим, різними авторами було запропоновано декілька узагальнень дробового броунівського руху на випадок змінного в часі параметра Хюрста, які отримали назву

мультидробових процесів. Зокрема, Р. Ф. Пелтє і Ж. Леві Велем введено в розгляд так званий мультидробовий броунівський рух з рухомим середнім, а А. Бенассі, С. Жаффаром і Д. Ру – гармонізований мультидробовий броунівський рух. Пізніше ще одне узагальнення, мультидробовий броунівський рух типу Вольтерра, досліджувалось у роботі Б. Буфуссі, М. Доцці та Р. Марті.

Поряд зі згаданими мультидробовими процесами, введено інші споріднені з дробовим броунівським рухом процеси, покликані покращити його властивості для моделювання реальних процесів, насамперед фінансових. Зокрема, у статтях П. Керідіто запропоновано розглядати змішаний дробовий броунівський рух, який являє собою лінійну комбінацію вінерівського та дробового броунівського процесів. Серед інших узагальнень варто відзначити субдробовий та бідробовий броунівські рухи, які мають дещо складніші за дробовий броунівський рух коваріаційні функції, проте зберігають частину його властивостей, зокрема самоподібність.

Значну увагу в роботі зосереджено на дробових дифузійних моделях, які задаються стохастичними диференціальними рівняннями з описаними процесами. Ці моделі утворюють досить широкий клас, до якого належать узагальнення на дробовий випадок класичних моделей фінансової математики (як-от моделі Орнштейна – Уленбека, Васічека, Кокса – Інгерсолла – Росса), а також моделей Ферхюльста і Гомперца, що використовуються в біології та демографії. Вивчаються також більш складні моделі, що описуються стохастичними диференціальними рівняннями з частинними похідними. Також досліджуються рівняння зі стохастичною волатильністю, в яких коефіцієнт дифузії залежить від іншого випадкового процесу. Такі моделі є досить гнучкими, вони дозволяють точніше описувати поведінку цінкових процесів, порівняно з їх класичними аналогами, а тому набувають дедалі ширшого застосування.

Використання описаних моделей на практиці потребує розроблення статистичних методів дослідження для дробових і споріднених процесів, а також побудови нових моделей та глибокого вивчення їхніх аналітичних властивостей як-от існування та єдиність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, гранична та асимптотична поведінка тощо.

## **Зміст роботи**

Роботу присвячено стохастичному аналізу та статистичному оцінюванню для дробових і споріднених процесів. У ній досліджено широке

коло задач з теорії випадкових процесів із довгостроковою та короткостроковою залежністю. Основною тематикою є математичні моделі процесів з пам'яттю, які виникають в багатьох задачах фізики, інформатики, економіки, кліматології, гідромеханіки та фінансової математики. Зокрема, такі процеси широко застосовуються для моделювання й прогнозування курсів валют, цін акцій, опціонів та інших цінних паперів, а також нерідко з'являються в задачах обробки зображень та при дослідженні процесів у комп'ютерних, електричних, телекомунікаційних мережах..

Одержані в роботі результати можна умовно поділити на дві частини. У першій частині досліджуються аналітичні властивості стохастичних моделей з дробовими та мультидробовими процесами як-от існування та єдиність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, гранична поведінка випадкових процесів та функціоналів від них тощо. У другій частині розглянуто статистичні задачі для згаданих моделей та розроблено методи оцінювання параметрів і перевірки гіпотез.

У роботі досліджено дробовий процес Кокса – Інгерсолла – Росса, що задовольняє стохастичне диференціальне рівняння, яке керується дробовим броунівським рухом з індексом Хюрста, що перевищує  $2/3$ . Інтеграл визначено як потраєкторний, що дорівнює границі інтегральних сум Рімана – Стілтєса. Встановлено, що до моменту першого потрапляння в нуль процес Кокса – Інгерсолла – Росса є квадратом дробового процесу Орнштейна – Уленбека. Розглянуто квадрат дробового процесу Орнштейна – Уленбека з будь-яким індексом Хюрста і доведено, що до моменту першого потрапляння в нуль він задовольняє стохастичне диференціальне рівняння вказаного вигляду, якщо стохастичний інтеграл визначено як потраєкторний інтеграл Стратоновича. Природним тоді є питання про момент першого попадання в нуль дробового процесу Кокса – Інгерсолла – Росса, що збігається з першим моментом попадання в нуль дробового процесу Орнштейна – Уленбека. Оскільки останній є гауссовим процесом, то з використанням оцінок для розподілів гауссового процесу доведено, що при ймовірність попадання в нуль за скінченний час дорівнює 1, а при вона додатна, але менше 1. Наведено верхню оцінку для цієї ймовірності.

Введено потраєкторне інтегрування відносно процесів Вольтерра, які керуються шумом Леві або мартингальним шумом. Такі процеси широко застосовуються у фізиці при вивченні турбулентності, а також в обробці сигналів, біології та медицині, фінансовій математиці. Вони утворюють досить гнучкий клас моделей, який включає в себе дробовий броунівський рух та процеси Леві. Запропонована теорія інтегрування базується на дробовому численні та є містком між випадковими та не випадковими

техніками. Встановлено умови існування інтеграла в термінах дробових похідних та вивчено його властивості. Як приклад розглянуто так званий дробовий процес Леві за перетворенням Молчана – Голосова. Одержані результати справедливі для широкого класу процесів Леві, проте окрему увагу приділено випадку субординованого вінерівського процесу, оскільки субординація є одним з простих способів конструювання процесу Леві та має переваги з точки зору моделювання. Зокрема детально вивчено випадки складеного пуассонівського, стійкого та гамма субординаторів.

Введено мультистійкий субординатор, який узагальнює стійкий субординатор на випадок змінного в часі параметра стійкості. За його допомогою означено мультидробовий процес Пуассона. Досліджено властивості цих процесів та встановлено збіжність випадкових блукань з неперервним часом до мультидробового процесу Пуассона.

Досліджено узагальнення дробового броунівського поля Леві в евклідовому просторі, яке базується на заміні евклідової норми іншою нормою. Зокрема виведено критерій існування та інтегральні зображення. Введена сім'я процесів збігається з сім'єю всіх автотельних гауссових полів зі стаціонарними приростами.

Схожим чином введено декілька неевклідових варіантів дробового пуассонівського поля та показано, що вони мають однакову коваріаційну структуру з дробовим броунівським полем та збігаються до нього для індексу Хюрста менше  $1/2$ . За допомогою спеціальної нормалізації одержано збіжність і для випадку, коли індекс Хюрста дорівнює  $1/2$ . Параметри форми пуассонівського і броунівського полів пов'язані між собою за допомогою перетворень опуклої геометрії, а саме: радіального середнього тіла порядку та полярного проектування.

Для класу неавтономних параболічних стохастичних диференціальних рівнянь із частинними похідними, визначених на обмеженій відкритій підмножині  $d$ -вимірного простору та керованих нескінченновимірним дробовим броунівським рухом, встановлено новий результат щодо існування та єдиності м'якого розв'язку. Порівняно з відомими результатами, єдиність доведена в цілком нелінійному випадку, без припущення афінності коефіцієнта перед шумом. Додатково встановлено існування моментів розв'язку.

Крім того, доведено існування та єдиність м'якого розв'язку для аналогічного стохастичного диференціального рівняння з частинними похідними, яке містить як стандартний, так і дробовий нескінченновимірні броунівські рухи. Припускається, що коефіцієнти є однорідними,

ліпшицевими, а коефіцієнт при дробовому броунівському русі є афінною функцією.

У статистичній частині роботи спочатку доведено асимптотичну нормальність дискретизованої оцінки максимальної вірогідності для параметра зсуву в однорідній ергодичній дифузійній моделі. Далі розглядається стохастичне диференціальне рівняння зі стохастичною волатильністю, коефіцієнт дифузії якого є функцією від деякого узгодженого процесу  $Y$ . Доведено теореми існування та єдиності для слабких і сильних розв'язків цього рівняння за різних припущень щодо процесу  $Y$  та коефіцієнтів рівняння. Детально вивчено окремий випадок мультиплікативної стохастичної волатильності. Побудовано оцінки невідомого параметра зсуву методами найменших квадратів та максимальної вірогідності, встановлено умови строгої консистентності одержаних оцінок. Детально розглянуто декілька прикладів таких моделей, зокрема модель Орнштейна – Уленбека та лінійну модель зі стохастичною волатильністю. В останньому випадку припускається, що процес  $Y$ , у свою чергу, також є розв'язком деякого дифузійного стохастичного диференціального рівняння. Теоретичні результати проілюстровано за допомогою комп'ютерного моделювання.

Досліджено задачу статистичного оцінювання невідомого параметра зсуву в стохастичному диференціальному рівнянні, керованому дробовим броунівським рухом. Відношення вірогідностей зображено у вигляді функції від процесу, що спостерігається. Одержаний вираз у загальному випадку є доволі складним. Проте в окремих випадках його можна спростити та дискретизувати, щоб встановити збіжність майже напевно дискретизованої оцінки максимальної вірогідності до істинного значення параметра. Також побудовано три нестандартні оцінки, які базуються на дискретних спостереженнях розв'язку. Доведено, що коли інтервал спостережень зростає, а відстань між спостереженнями прямує до нуля, ці оцінки збігаються майже напевне до істинного значення параметра. Знайдено оцінку для швидкості цієї збіжності.

Детально досліджено рівняння Ланжевена з невідомим параметром зсуву. Шум моделюється як дробовий броунівський рух з відомим індексом Хюрста. Розв'язок такого рівняння відповідає дробовому процесу Орнштейна – Уленбека. Виявляється, що методика оцінювання в цій моделі суттєво залежить від знаку невідомого параметра. Розроблено новий метод перевірки гіпотези про знак параметра та доведено консистентність побудованого тесту. На відміну від попередніх робіт, запропонований підхід можна застосовувати для всіх значень індекса Хюрста. Також вивчаються

оцінки невідомого параметра, як для неперервних, так і для дискретних спостережень цього процесу. Доведено строгу конзистентність оцінок. Розроблені методи узагальнено на випадок дробової моделі Васічека (двопараметричного процесу Орнштейна – Уленбека).

Також побудовано оцінку методу найменших квадратів для невідомого параметра зсуву в мультидробовій моделі Орнштейна – Уленбека і встановлено її строгу конзистентність в неергодичному випадку. Доведення базуються на асимптотичних оцінках з імовірністю 1 швидкості зростання траєкторій мультидробового броунівського руху та його приростів. Як допоміжні результати, що мають самостійне значення, одержано асимптотичні оцінки з імовірністю 1 швидкості зростання траєкторій гауссового процесу та деяких функціоналів від нього в термінах коваріаційної функції приростів.

Досліджено модель нелінійної регресії, у якій шум моделюється за допомогою центрованого гауссового процесу. Вивчається задача оцінювання невідомого параметра зсуву на основі неперервних спостережень траєкторії процесу. Встановлено формулу для функції вірогідності в термінах розв'язку інтегрального рівняння. Знайдено оцінку максимальної вірогідності та доведено її строгу конзистентність. Одержані результати узагальнюють відомі результати для дробового броунівського руху та змішаного дробового броунівського руху.

Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теорію та статистику випадкових процесів, а також у теорію стохастичних диференціальних рівнянь, як звичайних, так і з частинними похідними. Запропоновані в роботі методи можуть бути корисними при дослідженні математичних моделей випадкових явищ зі складною поведінкою, зокрема тих, які характеризуються довгостроковою або короткостроковою залежністю.

## **Наукова новизна одержаних результатів**

Наукова новизна результатів полягає в розробці наукових основ стохастичного аналізу дробових і споріднених процесів та методів статистичного оцінювання для них і базується на наступних положеннях. У роботі вперше:

- побудовано потраєкторні інтеграли відносно процесів Вольтерра, які керуються шумом Леві або мартингальним шумом;

- введено мультистійкий субординатор та мультидробовий процес Пуассона, досліджено їхні властивості та доведено функціональні граничні теореми, зокрема збіжність випадкових блукань з неперервним часом до мультидробового процесу Пуассона;
- введено неевклідові узагальнення дробового броунівського поля Леві та дробового пуассонівського поля, одержано інтегральні зображення та граничні теореми для них;
- доведено існування і єдиність м'якого розв'язку змішаного стохастичного рівняння теплопровідності з вінерівським та дробовим броунівським шумами;
- доведено існування моментів розв'язку стохастичного рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом;
- доведено теореми існування та єдиності для слабких і сильних розв'язків стохастичного диференціального рівняння зі стохастичною волатильністю;
- побудовано строго конзистентні оцінки невідомого параметра зсуву стохастичного диференціального рівняння зі стохастичною волатильністю;
- побудовано строго конзистентні статистичні оцінки невідомого параметру зсуву в дифузійній моделі з дробовим броунівським рухом;
- побудовано строго конзистентні статистичні оцінки невідомого параметру зсуву в ергодичній дробовій моделі Орнштейна – Уленбека за дискретними спостереженнями та запропоновано метод перевірки гіпотези про знак цього параметра;
- побудовано конзистентні статистичні оцінки невідомого параметру зсуву в неергодичній мультидробовій моделі Орнштейна – Уленбека та лінійній моделі з мультидробовим броунівським рухом;
- у регресійній моделі з центрованим гауссовим процесом побудовано оцінки максимальної вірогідності невідомого параметра та доведено їхню строго конзистентність.

Удосконалено:

- умови існування і єдиності м'якого розв'язку стохастичного рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом;
- умови асимптотичної нормальності дискретизованої оцінки максимальної вірогідності в однорідній ергодичній дифузійній моделі;
- умови строгої конзистентності оцінок невідомого параметру зсуву в дробовій моделі Орнштейна – Уленбека.



## Публікації результатів та їх цитування

Робота складається з 52 наукових праць, серед яких 2 монографії, 29 статей у провідних вітчизняних та міжнародних виданнях та 21 тези наукових конференцій, переважно міжнародних.

Усі публікації є реферованими та мають у міжнародній наукометричній базі даних Google Scholar 195 цитувань, h-індекс – 10. У міжнародній наукометричній базі даних SCOPUS зазначено 28 публікацій, які мають загалом 96 цитувань та h-індекс 7. У міжнародній наукометричній базі даних Web of Science вказано 19 публікацій, які мають загалом 43 цитування та h-індекс 4.

## Апробація результатів роботи

Результати роботи доповідались та обговорювались на наукових конференціях та засіданнях наукових семінарів провідних українських та міжнародних наукових установ, у тому числі:

- Міжнародна наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування», м. Київ, 6–9 червня 2005~р.;
- Сьома міжнародна міждисциплінарна конференція молодих вчених «Шевченківська весна 2009», м. Київ, 23–26 березня 2009 р.;
- Workshop on Long-Range Dependence: from Fractional Calculus to Financial Applications, м. Київ, 7–11 вересня 2009 р.;
- Workshop on Multifractality, м. Нансі, Франція, 21–22 жовтня 2009 р.;
- Workshop “New Trends in the Modelling of Fractional and Multifractional Stochastic Systems”, м. Кардіфф, Велика Британія, 5 травня 2010 р.;
- Тринадцята міжнародна конференція імені академіка М. Кравчука, м. Київ, 13–15 травня 2010 р.
- International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications III”, м. Київ, 7–11 вересня 2010 р.;
- Atelier sur les processus multifractionnaires, м. Нансі, Франція, 2010 р.;
- Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу», смт. Ворохта, 23–28 лютого 2011 р.;
- International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications III”, м. Київ, Україна, 10–14 вересня 2012 р.
- Workshop “Stochastic Processes: Theory and Statistical Applications”, м. Київ, Україна, 25 квітня 2013 р.

- 18th European Young Statisticians Meeting, м. Осієк, Хорватія, 26–30 серпня 2013 р.
- 10th International Conference “Computer Data Analysis and Modeling: Theoretical and Applied Stochastics”, м. Мінськ, Білорусь, 10–14 вересня 2013 р.
- Workshop “Statistique Asymptotique des Processus Stochastiques X”, м. Ле-Ман, Франція, 17–20 березня 2015 р.
- International Conference “Probability, Reliability and Stochastic Optimization”, м. Київ, Україна, 7–10 квітня 2015 р.
- 11th International Conference “Computer Data Analysis and Modeling: Theoretical and Applied Stochastics”, м. Мінськ, Білорусь, 6–10 вересня 2016 р.
- Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics: International workshop in honour of Prof. V. V. Buldygin, м. Київ, Україна, 10–12 жовтня 2016 р.
- XV Міжнародна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2017», м. Київ, Україна, 4–6 квітня 2017 р.
- 61st ISI World Statistics Congress, м. Марракеш, Марокко, 16–21 липня 2017 р.
- International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications, м. Черкаси, Україна, 17–19 жовтня 2017 р.
- Воркшоп «Фрактальні структури в математиці та її застосуваннях», м. Київ, Україна, 6 квітня 2018 р.
- International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications IV”, м. Київ, Україна, 24–26 травня 2018 р.
- 12th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics and 2018 IMS Annual Meeting on Probability and Statistics, м. Вільнюс, Литва, 2–6 липня 2018 р.
- CSA2019 – Conference in Stochastic Analysis and Applications, м. Рісбор, Норвегія, 26–30 серпня 2019.

Доктор фізико-математичних наук,  
 заступник декана  
 механіко-математичного факультету  
 Київського національного університету  
 імені Тараса Шевченка

К.В. Ральченко