СУЧАСНІ МЕТОДИ АЛГЕБРИ І ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Цикл робіт на здобуття державної премії України в галузі науки і техніки 2021 року

Представлено Національним педагогічним університетом імені М. П. Драгоманова

ОРГАНІЗАЦІЇ ВИКОНАВЦІВ РОБОТИ

ТЕХАСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ A&M (СПОЛУЧЕНІ ШТАТИ АМЕРИКИ)

ЛУГАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА (М. СТАРОБІЛЬСЬК)

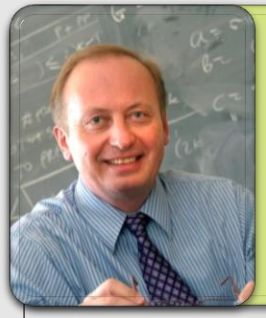
ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ

Інформація про авторів роботи



ГРИГОРЧУК Ростислав Іванович
доктор фізико-математичних наук, професор, заслужений професор Техаського університету A&M, громадянин Сполучених Штатів Америки

ЖУЧОК Анатолій Володимирович
доктор фізико-математичних наук, професор, Заслужений діяч науки і техніки України, завідувач кафедри алгебри та системного аналізу Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Старобільськ)

ЖУЧОК Юрій Володимирович
доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри алгебри та системного аналізу Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Старобільськ)

КУРДАЧЕНКО Леонід Андрійович
доктор фізико-математичних наук, професор, Заслужений діяч науки і техніки України, професор кафедри геометрії та алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара

ПЕТРАВЧУК Анатолій Петрович
доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри алгебри і комп'ютерної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

ПРАЦЬОВИТИЙ Микола Вікторович
доктор фізико-математичних наук, професор, Заслужений діяч науки і техніки України, декан Фізико-математичного факультету Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова, в.о. завідувача відділу динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України

СИСАК Ярослав Прокопович
доктор фізико-математичних наук, професор, провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України

ТОРБІН Григорій Мирославович
доктор фізико-математичних наук, професор, проректор з наукової роботи Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова, професор кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь, провідний науковий співробітник лабораторії фрактального аналізу Інституту математики НАН України

Кількісні показники циклу праць

Опубліковано **16** монографій, з яких **9** – у провідних закордонних видавництвах

Опубліковано **841** статтю, **347** з яких – у провідних англомовних журналах

ЗА ТЕМОЮ РОБОТИ

Загальна кількість посилань на публікації циклу праць:

Web of Science – **2259**, Scopus – **2417**, Google Scholar – **9576**

Захищено **12** докторських і **74** кандидатських дисертацій

Кількісні показники циклу праць

Scopus

Індекс Хірша:

- сумарний для всіх авторів роботи = **70**;
- роботи «Сучасні методи алгебри і теорії чисел та їх застосування» = **20**.

WEB OF SCIENCE

Індекс Хірша:

- сумарний для всіх авторів роботи = **68**;
- роботи «Сучасні методи алгебри і теорії чисел та їх застосування» = **21**.

Google scholar

Індекс Хірша:

- сумарний для всіх авторів роботи = **135**;
- роботи «Сучасні методи алгебри і теорії чисел та їх застосування» = **35**.

Наукометричні показники авторів роботи

П.І.Б.	Scopus		Web of Science		Google Scholar	
	цитування	h-індекс	цитування	h-індекс	цитування	h-індекс
Григорчук Р.І.	1076	**14**	1012	**18**	7400	**42**
Жучок А.В.	203	**10**	229	**10**	611	**14**
Жучок Ю.В.	41	**4**	20	**3**	105	**6**
Курдаченко Л.А.	704	**14**	711	**13**	2442	**21**
Петравчук А.П.	55	**4**	32	**3**	166	**7**
Працьовитий М.В.	132	**6**	103	**5**	1677	**16**
Сисак Я.П.	241	**10**	170	**9**	301	**11**
Торбін Г.М.	166	**8**	128	**7**	1022	**18**
$\sum$	**2 618**	**70**	**2 405**	**68**	**13 724**	**135**

Монографії – **16**

9

- в англомовних високорейтингових видавництвах: Springer Verlag – **1**, Birkhäuser – **3**, World Scientific – **1**, John Wiley&Sons – **3**, Potsdam University Press – **1**

4

- у видавництві Інституту математики НАН України, з яких **2** опубліковано іноземною мовою

3

- у видавництві: Наукова думка – **2**, Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова – **1**

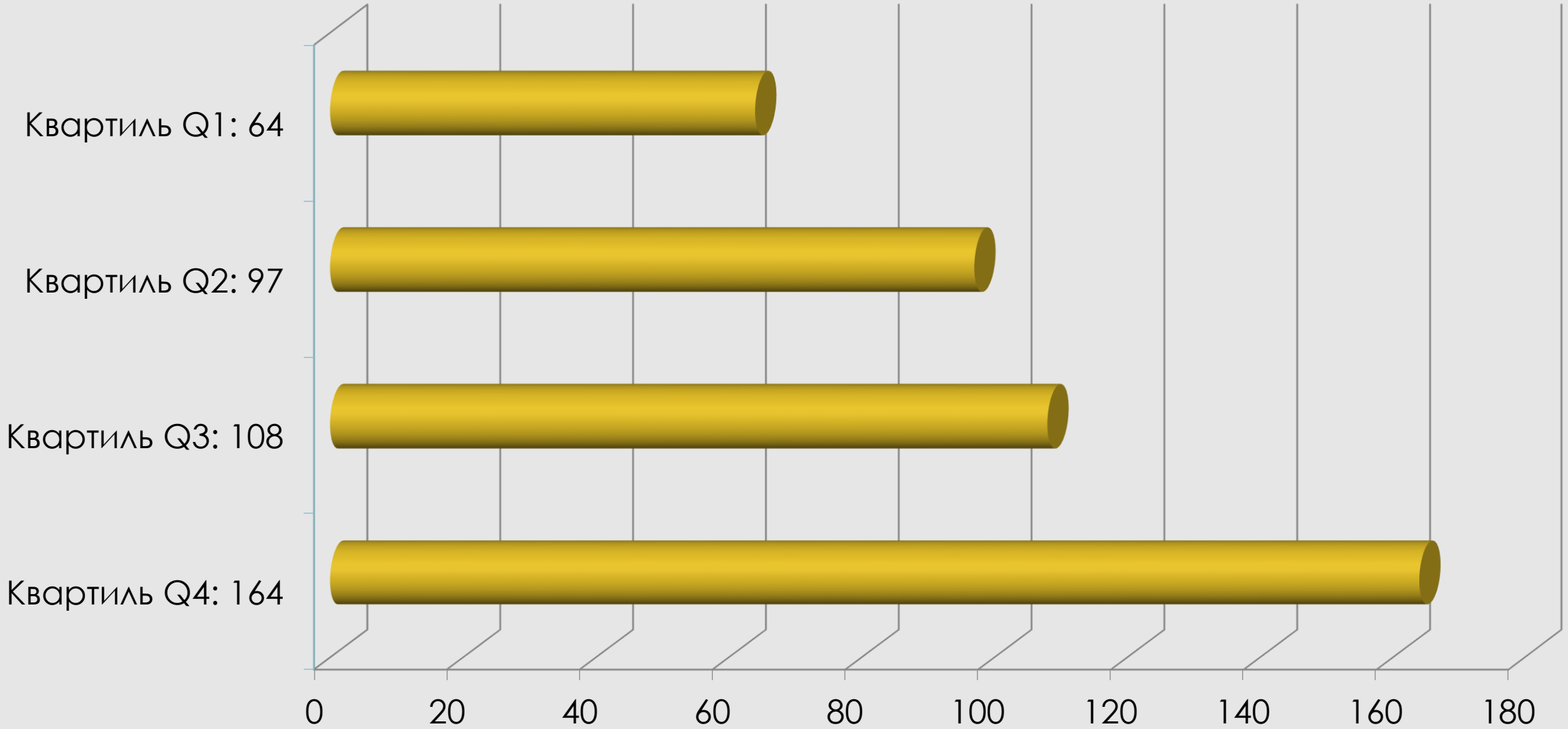
Таблиця монографій - (I)

№	Назва монографії, автори, вихідні дані
1	*Combinatorial Group Theory and Applications to Geometry*, R. I. Grigorchuk, J. Collins, P. Kurchanov, H. Zieshang, **Springer Verlag**, Berlin, **1998**.
2	*New Horizons in pro-p Groups*, R. I. Grigorchuk, D. Segal, A. Shalev, du Sautoy and others, **Birkhäuser**, **2000.**
3	*Groups with prescribed quotient groups and associated module theory*, Kurdachenko L.A., Otal J., Subbotin I.Ya, **World Scientific**, New Jersy, London, Singapore, Hong Kong, **2002.**
4	*Solved and Unsolved Problems Around One Group, in Infinite Groups: Geometric, Combinatorial and Dynamical Aspects*, Grigorchuk R.I., Bartholdi L., Ceccherini-Silberstein T., Smirnova-Nagnibeda T., Progress in Mathematics Series, Vol. 248. (Eds.), 413 p., Hardcover A **Birkhauser book**, **2005.**
5	*Artinian modules over group rings. Frontiers in Mathematics*, **Birkhäuser**, Kurdachenko L.A., Otal J., Subbotin I.Ya., Basel, **2007.**
6	*Insight into modules over Dedekind domains*, Kurdachenko L.A., Semko N.N., Subbotin I.Ya., **Institute of Mathematics**, Kiev, **2008.**
7	*Algebra and number theory. An integrated approach*, Kurdachenko L.A., Dixon M.R., Subbotin I.Ya., **John Wiley & Sons**, New Jersey, **2010.**
8	*An introduction to essential algebraic structures*, Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya., **John Wiley & Sons**, New Jersey, **2014.**

Таблиця монографій - (II)

№	Назва монографії, автори, вихідні дані
9	*The survey on infinite groups: a guide to some classical areas*, Kurdachenko L.A., Pypka A.A., Semko N.N., Subbotin I.Ya., National Academy of Sciences of Ukraine, **Institute of Mathematics**, Kiev, **2016.**
10	*Ranks of groups: the tools, characteristics, and restrictions*, Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya., **John Wiley & Sons**, New Jersey, **2017.**
11	*Relatively free doppelsemigroups*, Zhuchok A. V., The monograph series Lectures in Pure and Applied Mathematics. Germany. Potsdam: **Potsdam University Press**, Vol. 5, **2018.**
12	*Фрактальные множества, функции, распределения*, Турбин А.Ф., Працевитый Н.В., Киев: **Наук. думка**, **1992.**
13	*Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*, Працьовитий М.В., Київ: **НПУ імені М.П.Драгоманова**, **1998.**
14	*Діалгебри*, Жучок А.В., Київ : Ін-т математики, **2011.** (Математика та її застосування) (**Праці / Ін-т математики НАН України**; т. 87).
15	*Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їх застосування*, Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М., Київ: **Наукова думка**, **2013.**
16	*Елементи теорії дімоноїдів*, Жучок А.В., Київ : Ін-т математики, **2014.** (Математика та її застосування) (**Праці / Ін-т математики НАН України**; т. 98).

Розподіл статей, що входять до Scopus, по квартилях Q1-Q4 (433 статті)



Таблиця цитувань праць циклу (**841** стаття)

№	Назва публікації (статті або монографії), автори, вихідні дані	WoS	Scopus	Google
1	Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means, Grigorchuk R.I., Mathematics of the USSR-Izvestija (1985), 25(2), 259-300.	76	121	233
2	Thee Lamplighter group as a group generated by a 2-state automaton, and its spectrum, Grigorchuk R.I., Zuk A., Geometric Dedic (2011), 81(1-3), 209-244.	127	118	252
3	Burnside's problem on periodic groups, Grigorchuk R.I., Functional Analysis and its Applications, (1980), 14(1), 41-43.	--	102	214
4	Branch groups, Bartholdi L., Grigorchuk R.I., Šunik Z, Handbook of Algebra (2003), 3, 989-1112.	--	96	197
5	On problems related to growth, entropy, and spectrum in group theory, Grigorchuk R.I., Journal of Dynamical and Control Systems (1997-8), 3(1), 519.	--	87	153
6	Solved and Unsolved Problems Around One Group, in Infinite Groups: Geometric, Combinatorial and Dynamical Aspects, Grigorchuk R.I., Bartholdi L., Ceccherini-Silberstein T., Smirnova-Nagnibeda T., Progress in Mathematics Series, Vol. 248. (Eds.), (2005), 413 p., Hardcover A Birkhauser book, 117-218.	12	72	146
7	On a torsion-free weakly branch group defined by a three state automaton, Grigorchuk R.I., Zuk A., International Journal of Algebra and Computation, (2002), 12(1-2), 223-246.	74	55	174
8	On a question of Atiyah, Grigorchuk R.I., Linnell P., Schick T., Andrzej Z., Comptes Rendus de l'Academie des Sciences - Series I: Mathematics (2000), 331(9), 663-668.	54	45	105
	……			

Кількість публікацій в англомовних журналах з імпакт-фактором: **347** статей

№	Назва журналу, квартиль Q1	№	Назва журналу, квартиль Q2
1	Transactions of the American Mathematical Society	1	Journal of the Australian Mathematical Society
2	Proceedings of the American Mathematical Society	2	Glasgow Mathematical Journal
3	Advances in Mathematics	3	Illinois Journal of Mathematics
4	Inventiones Mathematicae	4	Acta Arithmetica
5	Journal Pure and Applied Algebra	5	Monatshefte fur Mathematik
6	Canadian Journal of Mathematics	6	Journal of Group Theory
7	Ergodic Theory and Dynamical Systems	7	Archiv der Mathematik
8	Journal of Algebra	8	Geometriae Dedicata
9	Geometric and Functional Analysis	9	Semigroup Forum
10	Groups, Geometry and Dynamics	10	Communications in Algebra
11	Journal of the London Mathematical Society	11	Journal of Algebra and its Applications
12	Israel Journal of Mathematics	12	International Journal of Algebra and Computation
…	……	…	……..

Обґрунтування об’єднання публікацій в єдиний цикл

Всі публікації праці об’єднані головною метою дослідження – побудовою нових ефективних методів та розвиненням й вдосконаленням існуючих підходів до задач загальної алгебри і теорії чисел, які мають різноманітні застосування в широкому спектрі проблем сучасної математики, зокрема у теоріях чисел, груп, напівгруп, допельнапівгруп, асоціативних кілець, модулів, алгебр Лі та алгебр Лейбніца, дімоноїдів і тріоїдів, фракталів, гіперграфів, геометрії, автоматів, формальних мов, алгоритмів, криптографії, функцій, ймовірностей та її додатків.

Переважна більшість з отриманих методів виникла на шляху розв’язання цілої низки відомих світових математичних проблем, наприклад, таких як проблеми лауреатів премії Філдса Д. Мілнора та М. Атьї, проблема Арнольда-Крилова, проблема Магнуса-Чандлера, гіпотеза Розенблатта, проблеми Кегеля, проблема Кемхадзе, проблема Фройденбурга, гіпотеза Дженінгса-Красільнікова, проблема Плоткіна тощо.

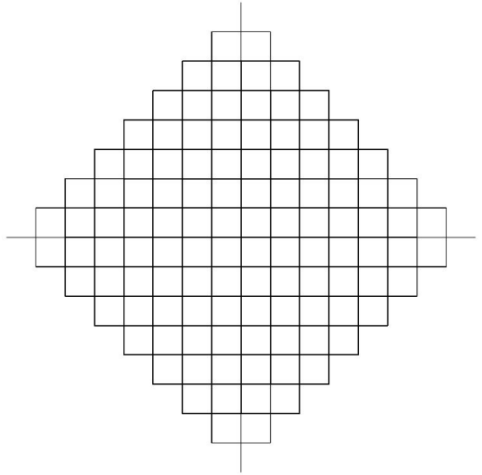
У праці встановлено різноманітні зв’язки теорії груп з багатьма іншими розділами загальної алгебри, динамічними системами, абстрактним гармонійним аналізом, геометрією, теорією графів, дискретною математикою, теорію випадкових блукань, теорією ймовірностей, теорією фракталів, криптографією тощо.

Методи теорії груп та їх застосування - (I)

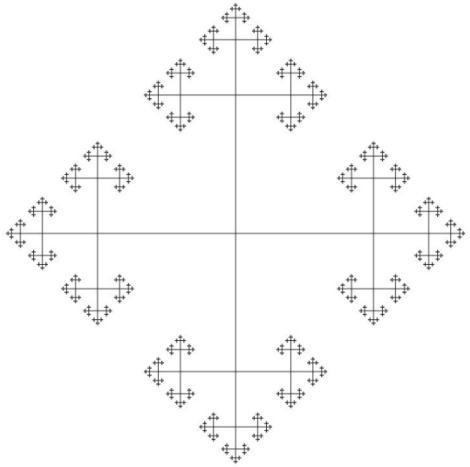
Для досягнення мети роботи було суттєво вдосконалено, значно розвинуто або узагальнено існуючі підходи до розв'язання алгебраїчних та теоретико-числових проблем, і розроблено та запропоновано нові сучасні методи алгебри і теорії чисел, а саме:

- *запропоновано новий метод доведення того, що група не є супер аменабельною, який полягає в використанні введеного Григорчуком поняття парадоксального піддерева в* ***графі Келі*** *групи;*
- *побудовано контрприклад до сильної гіпотези М. Атьї та розроблено новий метод побудови многовидів з нецілими числами Бетті;*
- *запропоновано комбінаторний метод вивчення обмежених когомологій й пораховано другу групу обмежених когомологій вільних груп та фундаментальних груп замкнутих орієнтованих поверхонь;*
- *розроблено нові методи вивчення спектрів операторів Лапласа та Маркова на графах й групах, і побудовано приклади* ***графів Шрейєра*** *з канторовським спектром та нескінчених груп з чисто точковим спектром;*

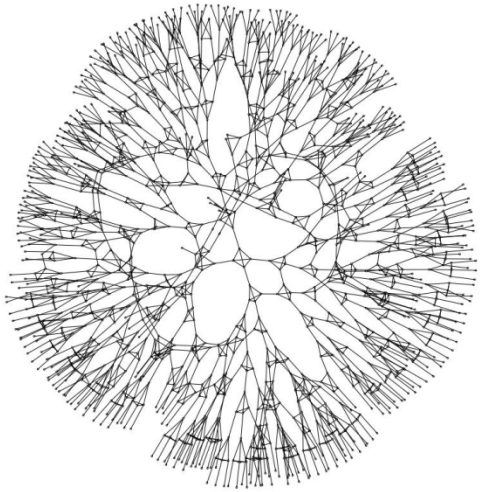
Графи Келі деяких груп



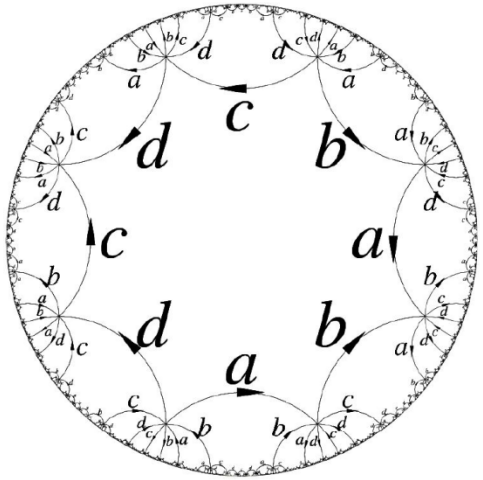
(a)



(b)

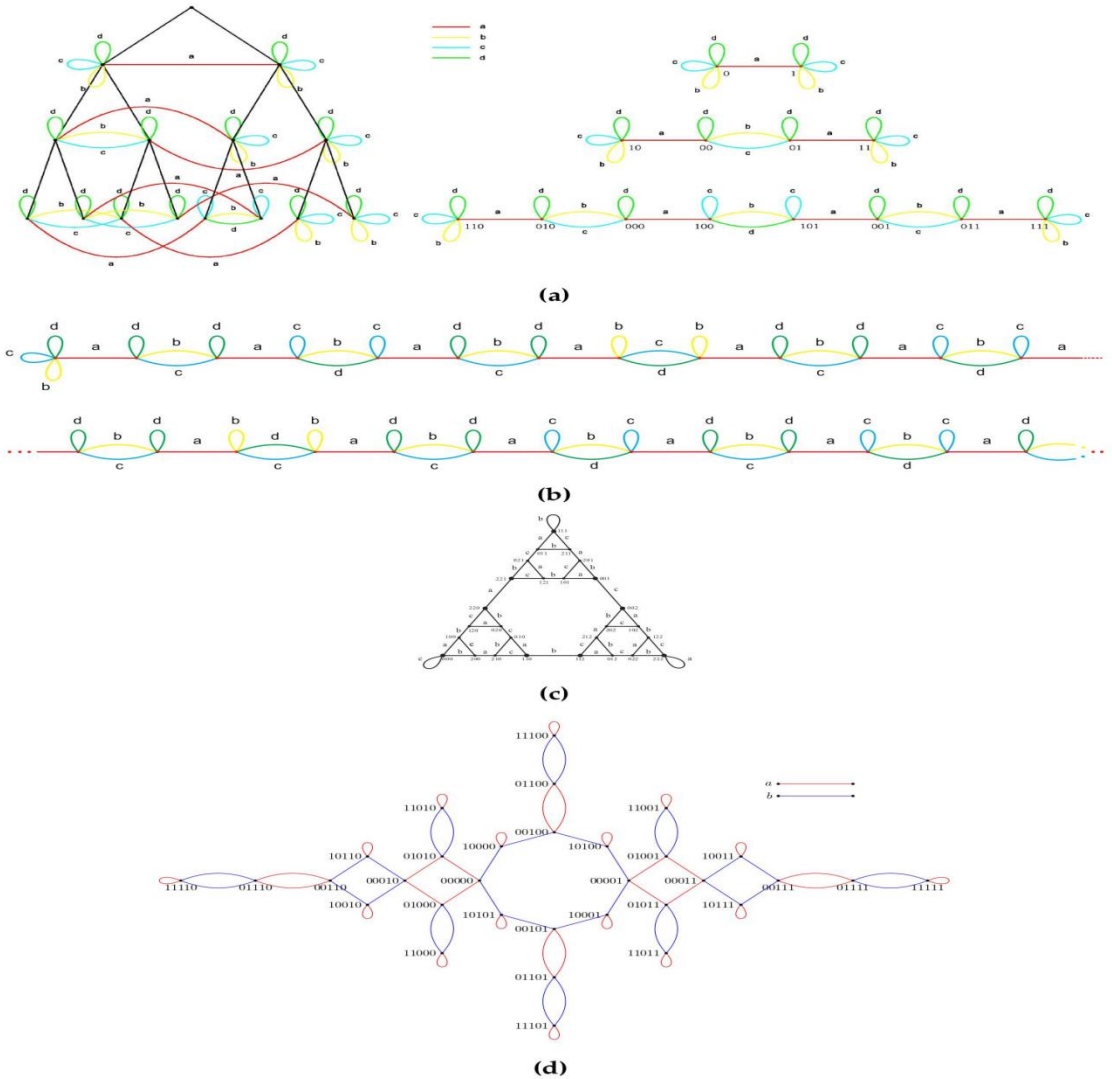


(c)



(d)

Графи Шрейера деяких груп



(a)

(b)

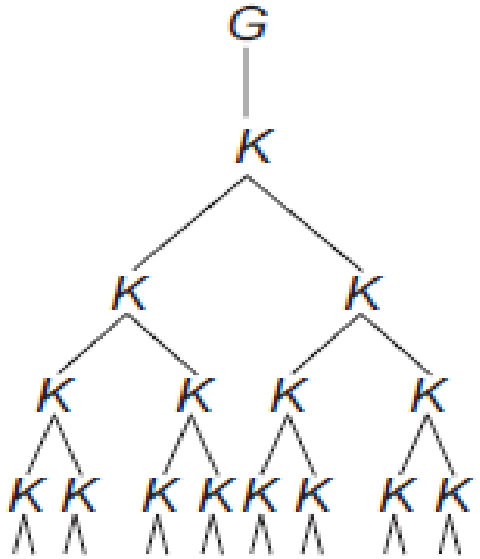
(c)

(d)

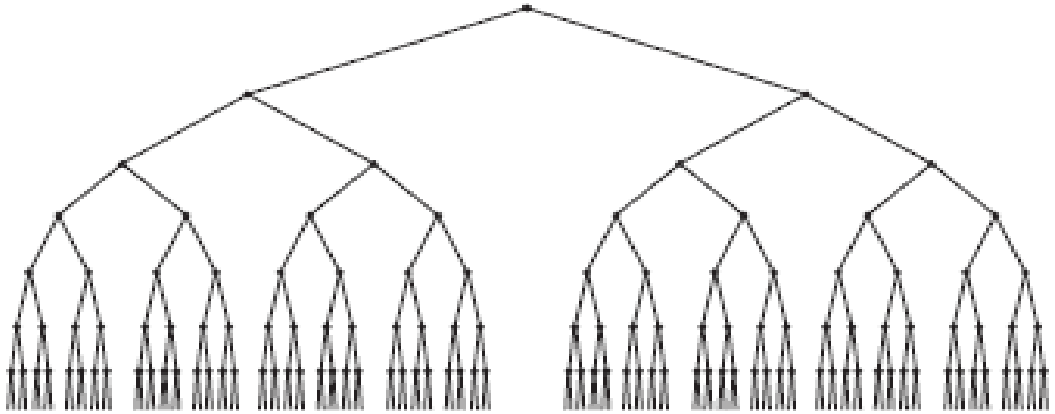
Методи теорії груп та їх застосування - (II)

- *створено методи редукції спектральної проблеми на самоподібних графах до проблеми знаходження інваріантної множини багатовимірного раціонального відображення на Евклідовому просторі та до проблем, пов'язаних з випадковим оператором Шредінгера;*
- *розвинуті методи використання теорії Чомського-Шютценберже формальних мов в теорії груп і навпаки, використання методів теорії груп в теорії формальних мов та теорії* ***скінчених автоматів*** *типу Мура-Мілі;*
- *розроблено нові методи дослідження груп, що діють автоморфізмами на кореневих деревах, зокрема* ***гіллястих та самоподібних груп****;*
- *створено метод вивчення самоподібних блукань на самоподібних групах з використанням трюку, що отримав назву "Мюнхаузена трюк", а також розроблено метод використання теорії складності Колмогорова в теорії груп;*
- *запропоновано метод використання груп Григорчука та інших самоподібних груп в криптографії та суттєво розвинуто методи вивчення та побудови фракталів з допомогою груп;*

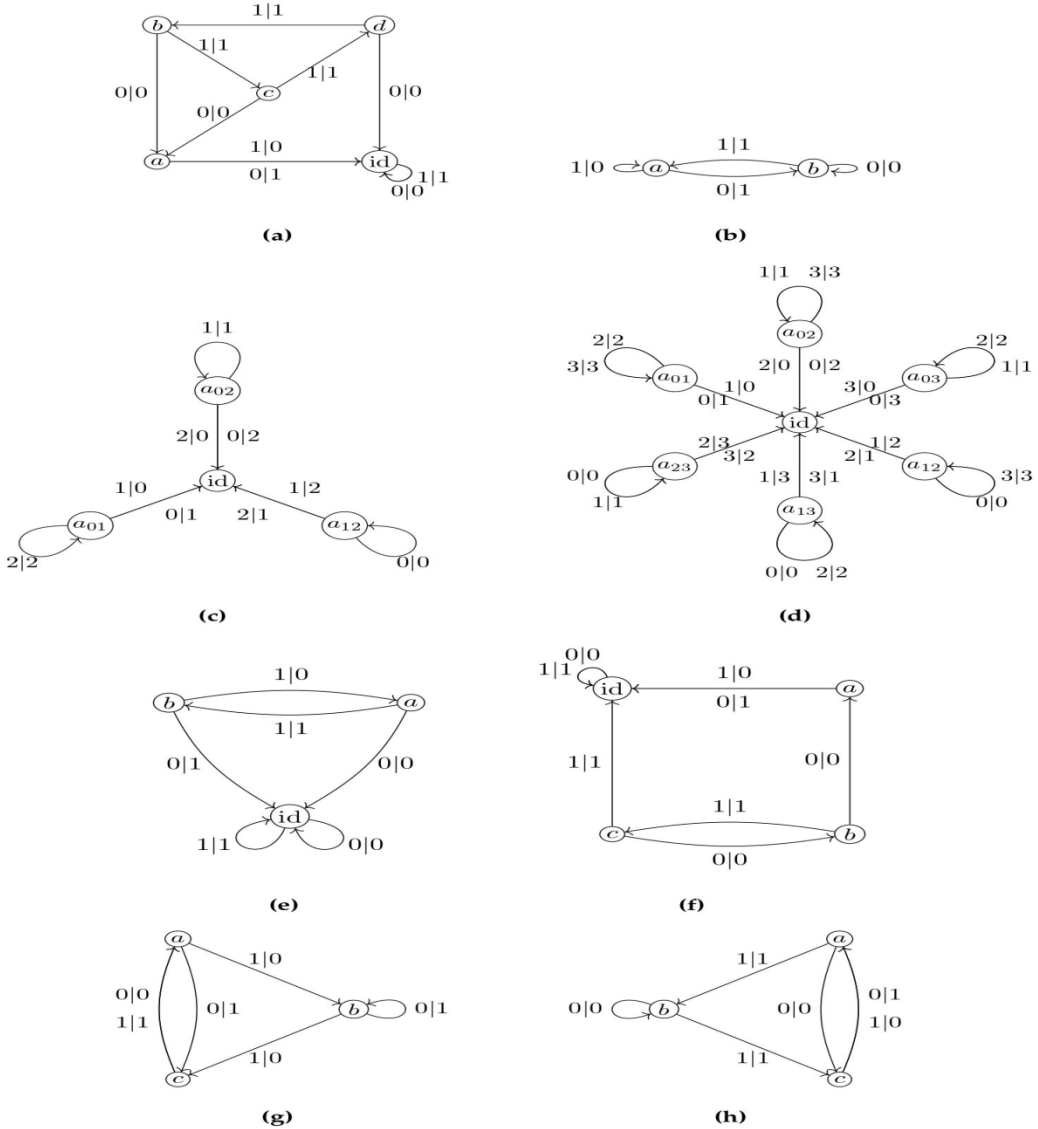
Кореневі дерева та гіллясті групи



Binary tree



Приклади скінченних автоматів деяких груп



Методи теорії груп та їх застосування - (III)

- *розроблені нові методи вивчення груп з обмеженнями на класи спряжених елементів, які дали можливість суттєвого проникнення у структуру таких груп, а також неперіодичних груп зі скінченими класами спряжених елементів;*
- *створені нові методи вивчення груп з обмеженнями, фактор–групи яких мають важливі фіксовані властивості, які базуються на побудові деяких типів модулів та вивчення їх будови;*
- *розроблені нові результативні методи вивчення груп зі слабкими умовами скінченності, нескінченно вимірних лінійних груп, а також модулів над груповими кільцями нескінчених груп;*
- *розроблені методи досліджень зв'язків факторів верхніх та нижніх центральних рядів та їх числових характеристик, які базуються на знаходженні прямих розкладів важливих типів модулів;*

Методи теорії груп та їх застосування - (IV)

на основі відомого поняття радикального кільця в сенсі Джекобсона, якщо його розглядати як модуль над своєю приєднаною групою, розвинуто більш загальну теорію радикальних модулів над групами;

встановлено, що поняття радикального модуля збігається з поняттям брейса (brace), яке зв'язане з вивчення розв'язків відомого рівняння Янга-Бакстера, і до яких воно має пряме відношення;

розроблено методи побудови добутків груп з заданими властивостями, в основі яких знаходиться поняття радикального модуля;

розвинуто методи дослідження взаємозв'язків між груповою та лієвою структурами в локальних та радикальних кільцях;

Методи теорії алгебр Лі

- *узагальнено методи теорії алгебр Лі диференціювань областей цілісності, зокрема поліноміальних кілець над полями нульової характеристики;*
- *значно розвинуто теорію розв'язних і нільпотентних алгебр Лі диференціювань (геометричною мовою – векторних полів) з застосуваннями в класифікаційних задачах рівнянь математичної фізики;*
- *узагальнено методи дослідження сум алгебр Лі, близьких до нільпотентних;*
- *суттєво розвинуто методи вивчення алгебр Лі, які складаються з локально нільпотентних диференціювань;*

Методи теорії напівгруп та їх застосування до алгебр Лоде – (I)

- *застосовуючи метод занурення алгебр, доведено що будь-який дімоноїд міститься у якості піддімоноїда в деякому дімоноїді з бар-одиницями;*
- *запропоновано узагальнення класичних напівгрупових методів отримання вільних об'єктів на випадок дімоноїдів, тріоїдів та допельнапівгруп;*
- *розвиток методу декомпозиції дозволив дослідити структурні властивості дімоноїдів, тріоїдів та допельнапівгруп, використовуючи поняття сполуки напівгруп;*
- *узагальнено метод В. М. Усенка опису напівретракцій моноїдів, що дозволило розв'язати задачі характеризації низки конгруенцій на певних алгебрах Лоде;*

Методи теорії напівгруп та їх застосування до алгебр Лоде – (II)

модифіковано метод Машевицького-Шайна опису автоморфізмів напівгруп ендоморфізмів вільних напівгруп та вільних моноїдів на випадок вільних комутативних дімоноїдів та деяких їх узагальнень;

узагальнено метод Зарецького опису зображень впорядкованих напівгруп бінарними відношеннями на випадок упорядкованих дімоноїдів та допельнапівгруп;

розвинуто метод Бьотчера-Кнауера класифікації графів у термінах значень їх ендотипу відносно ланцюга включень різних видів ендотопізмів;

застосовано метод Л. М. Глускіна отримання абстрактних характеристик напівгруп перетворень до певних алгебр Лоде;

Методи теорії чисел та їх застосування – (I)

створено методологію аналітичного задання та дослідження локально складних неперервних мір та функцій (сингулярних, ніде не монотонних), що грунтується на широкому використанні різних систем зображення дійсних чисел та нових форм функціональних залежностей, їх структурних, варіаційних, автомодельних, інтегро-диференціальних властивостей, розподілів їх значень;

розроблено методику мультифрактального аналізу сингулярних ймовірнісних мір, зосереджених на фракталах з локально складною структурою;

започатковано грунтовне вивчення сингулярних ніде не монотонних функцій;

Методи теорії чисел та їх застосування – (ІІ)

розроблено загальні концептуальні основи теорії кодування (перекодування та декодування) дійсних чисел засобами різних алфавітів, створення її геометричної, тополого-метричної та ймовірнісної складових, обґрунтування нормальних властивостей чисел у різних системах зображеннях чисел;

запропоновано груповий погляд на фрактальну геометрію як теорію інваріантів групи DP-перетворень простору;

узагальнено метод Біллінгслі довірчості системи покриттів при визначенні фрактальної розмірності, вдосконалено методи обчислення розмірності недосконалих фрактальних множин типу Безиковича-Егглстона;

розроблено методи побудови фрактальних множин, як об'єктів, пов'язаних з групами, та дослідження їх геометричних та динамічних властивостей.

Застосування методів – (I)

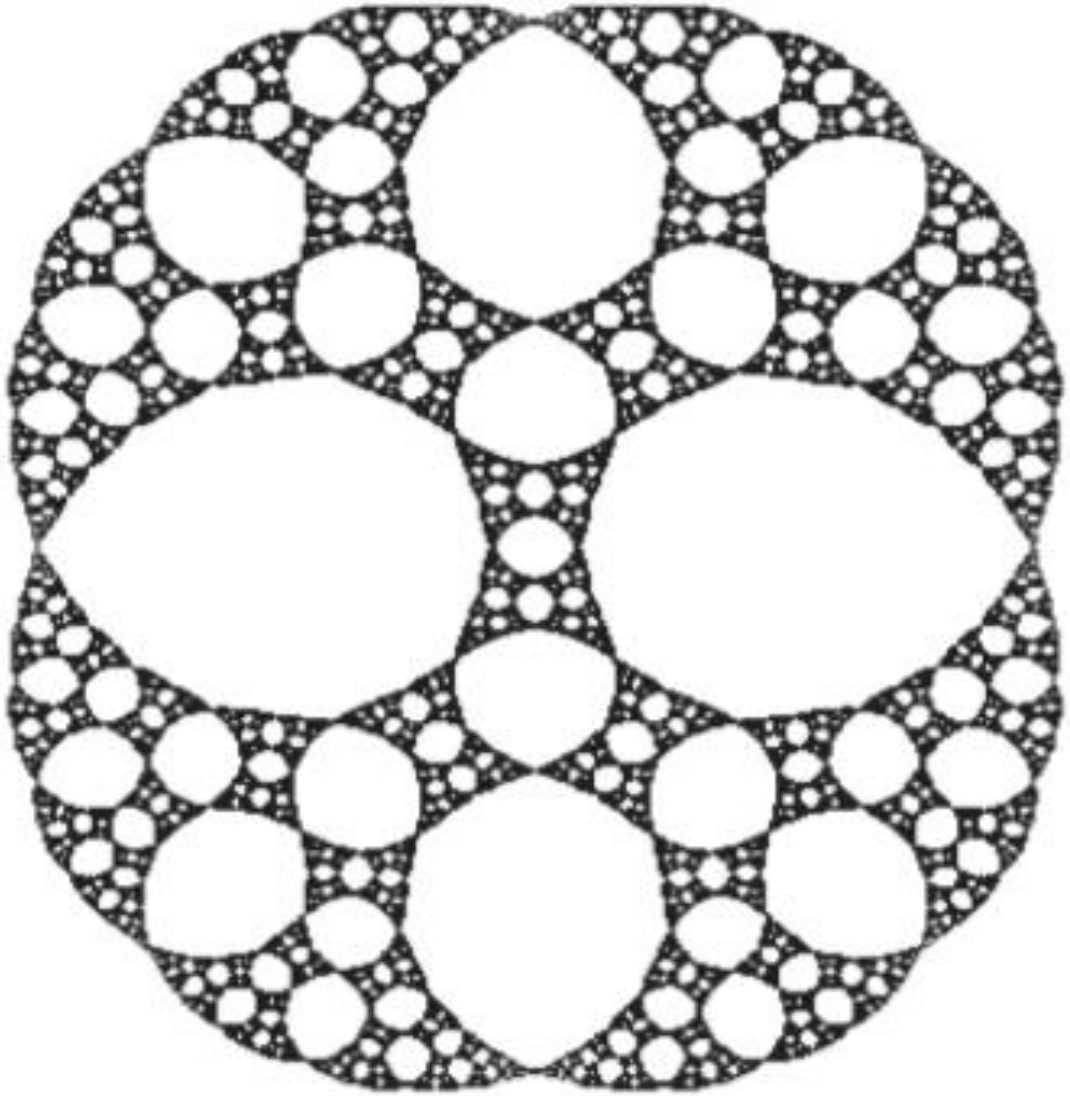
Отримано **важливі результати в теорії груп та областях її застосування**: динамічних системах, абстрактному гармонійному аналізі, геометрії, топології, теорії зображень, теорії випадкових блукань, теорії графів, спектральній теорії на графах та групах, теорії формальних мов та скінчених автоматів, теорії когомологій, дискретній математиці, теорії фракталів, теорії алгоритмів та їх складності, криптографії

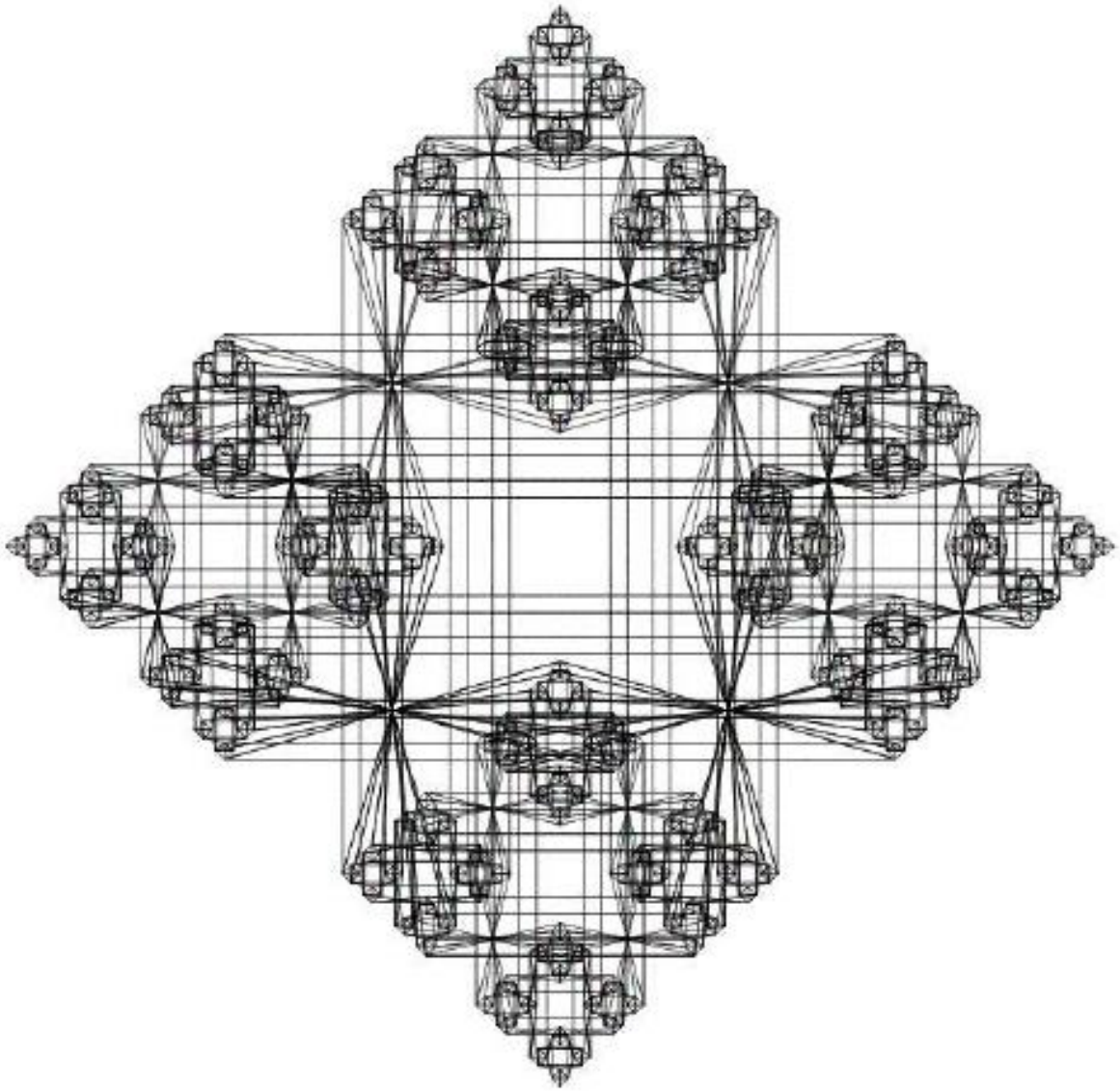
Розроблена **теорія груп проміжного росту між поліноміальним та експоненційним** (**групи Григорчука**), які мають численні застосування в математиці

Показано, що клас аменабельних груп значно ширший за клас елементарно аменабельних груп, побудований **фон Нейманом** в 1929 році, що спричинило **виникнення й розвинення теорії неелементарної аменабельності разом з новими методами** доведення аменабельності груп та інших об’єктів

Відкрито новий **критерій аменабельнсті** (**Grigorchuk’s criterion**), який ґрунтується на комбінаторних властивостях групи та за допомогою якого побудовано ряд контр-прикладів в теорії інваріантних середніх на групах

Фрактальні множина та граф, пов'язані з самоподібними групами $\left(IMG\left(\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2\right)\right.$ та група Ханойських веж)





Застосування методів – (II)

Розв'язана **проблема С. Прайда** про нескінченні скінчено породжені групи у яких кожна власна фактор група скінченна, але не виконується умова максимальності для субнормальних підгруп

Розв'язана **проблема Лауреата премії Філдса Ю. Зельманова** про існування не класичних груп зі скінченною комутаторною шириною

Введено **поняття гіллястої групи** і побудована теорія таких груп, в термінах яких, зокрема, **доведена теорема про трихотомію в класі мінімально нескінченних груп** та аналог цієї теореми для дещо іншого класу алгебр

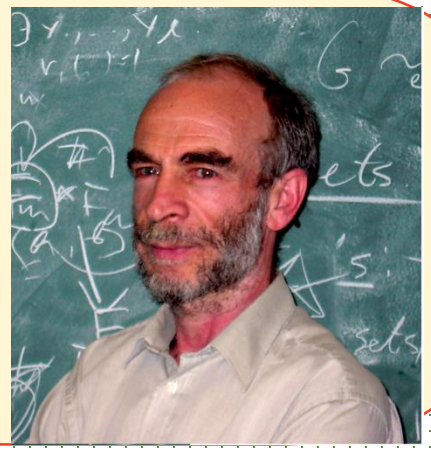
Введено **поняття самоподібної групи** і **побудована теорія** таких груп

Введено **поняття графу Келі алгебри Лі** та побудовані приклади таких алгебр, що мають фрактальну природу

Застосування методів – (III)

Одержані важливі результати **для груп з черніковськими та майже поліциклічними класами спряжених елементів**, розпочато вивчення груп з **мінімаксними класами спряжених елементів** та їх узагальнень

Введено **поняття повної та операторної функцій росту** та доведено їх раціональність для важливого класу гіперболічних за **Громовим** груп



Отримані змістовні **результати про вплив важливих типів підгруп** нескінченних груп, які антагоністичні за своїми властивостями до нормальних, **про вплив різних систем фактор-груп на будову всієї групи**

Одержані важливі результати **про структуру груп різноманітних скінчених рангів, з'ясовано вплив на їх структуру важливих систем підгруп**, зокрема системи абелевих підгруп

Застосування методів – (VII)

Розроблено новий метод зведення класифікаційних задач із теорії алгебр Лі диференціювань до задач із теорії зображень

Доведено, що задача класифікації скінченновимірних алгебр Лі векторних полів від чотирьох змінних **є дикою**

Удосконалено методи вивчення алгебр Лі, які складаються із локально нільпотентних диференціювань, **розв'язано проблему Фройденбурга** для скінченновимірного випадку

З'ясовано будову циклічних й мінімальних алгебр Лейбніца, описані мінімальні алгебри Лейбніца, в яких кожна підалгебра є ідеалом, а також **алгебри Лейбніца з умовою транзитивності для ідеалів**

Застосування методів – (IV)

Одержані важливі **результати про структуру груп зі слабкими умовами скінченності** для важливих типів підгруп, а також про **про будову модулів над груповими кільцями нескінченних груп**

Розпочато **дослідження нескінченно вимірних лінійних груп**, запропоновано нові результативні підходи до вивчення будови таких груп

Розроблені базові основи **теорії неперіодичних груп зі скінченними класами спряжених елементів,** а також отримано результати **про структуру груп з обмеженнями, пов'язаними з різноманітними рангами**

Одержані нові **результати про зв'язок факторів верхніх та нижніх центральних рядів**, отримані відповідні числові інваріанти а також знайдені **нові класи Шура для базових комутаторних слів**

Застосування методів – (V)

Отримана детальна класифікація груп, що є добутками двох своїх локально циклічних підгруп без скруту (**проблема Сесекіна**)

Вперше побудовані приклади непримарних локально скінченних груп, які є добуткам двох своїх *p*-підгруп, що позитивно розв'язує **проблему Кемхадзе**

Доведено гіпотезу Дженінгса–Красільнікова про еквівалентність групової та лієвої метабелевості в локальних та радикальних кільцях

Вперше побудовані приклади лінійних груп над полем, що є добутками трьох своїх попарно переставних абелевих підгруп, що дає позитивну відповідь на **проблему, поставлену О. Кегелем**

Застосування методів – (VI)

Вперше побудовано нерозв'язну алгебру Лі, яка є сумою двох своїх нільпотентних підалгебр, що дає негативну відповідь на **проблему О. Кегеля**

Вперше досліджено суми абелевої і нільпотентної алгебр Лі, отримано оцінки ступеня розв'язності в характеристиці нерівній 2

Розроблено нові методи дослідження сум алгебр Лі, які близькі до нільпотентних, побудовано відповідне комутаторне числення

Вперше отримано оцінки ступеня розв'язності алгебр Лі диференціювань областей цілісності над полями характеристики нуль

Застосування методів – (VIII)

Започатковано дослідження дімоноїдів (введених Ж.-Л. Лоде), **тріоїдів** (введених Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко) та **допельнапівгруп** (введених Б. Ріхтер)

Побудовано нові численні конструкції дімоноїдів, тріоїдів і допельнапівгруп, **встановлено незалежність аксіом** дімоноїдів і допельнапівгруп

Запропоновано аналог теореми Келі в класі дімоноїдів та **розроблено новий метод побудови** дімоноїдів з використанням напівгрупової операції

Для дімоноїдів, тріоїдів та допельнапівгруп розвинуто теорію многовидів, у якій центральну роль відіграє поняття вільного об'єкта

Застосування методів – (IX)

Вперше отримано структурні теореми про будову деяких алгебр Лоде, зокрема, доведено, що довільний тріоїд (дімоноїд) є напівструктурою *s*-простих підтріоїдів (піддімоноїдів)

Розв'язано проблеми опису структурних властивостей напівгрупових конструкцій, зокрема, охарактеризовано групу автоморфізмів напівгрупи

Розв'язано проблему визначеності деяких класів дімоноїдів, *g*-дімоноїдів та тріоїдів своїми **напівгрупами ендоморфізмів**

Розв'язано проблему Б. І. Плоткіна про опис автоморфізмів напівгруп ендоморфізмів вільних алгебр для многовиду комутативних дімоноїдів та узагальнених дімоноїдів

Застосування методів – (X)

Досліджено властивості напівгруп ендоморфізмів вільних моногенних дімоноїдів, комутативних дімоноїдів (комутативних g-дімоноїдів) та тріоїдів

Вперше розпочато дослідження зображень упорядкованих дімоноїдів та спільно з Й. Коппіцом – **упорядкованих допельнапівгруп** бінарними відношеннями

Побудовано універсальний об'єкт для 0-категорійних інверсних напівгруп, **класифіковано** з точністю до ізоморфізму всі його зрізи, що відповідають відношенням Гріна

Вперше класифіковано відношення еквівалентності у термінах значень їх ендотипу відносно ендотопізмів, **отримано зображення напівгруп ендоморфізмів** заданих класів графів, гіперграфів, теоретико-напівгрупових конструкцій

Застосування методів – (XI)

Узагальнено класичні теореми **Е.Бореля** (про нормальність чисел), **Р.Салема** (про сингулярність функції), **П.Біллінгслі** (стосовно розмірності Гаусдорфа-Безиковича), **Г.Мінковського** (про сингулярність функції, означеної в термінах ланцюових дробів), **А.Безиковича** (про фрактальну розмірність множин, визначених частотами використання цифр), **Джессена-Вінтнера** (про лебегівську чистоту ймовірнісної міри) та ін.

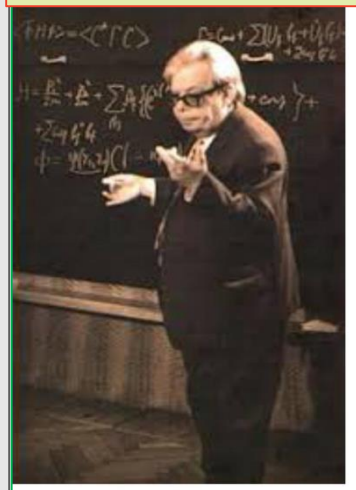
Створено ряд нових двосимвольних систем кодування дійсних чисел, теорію ланцюгових А2-дробів, **запропоновано тонку спектральну та мультифрактальну класифікацію** самоспряжених операторів з сингулярно неперервним спектром

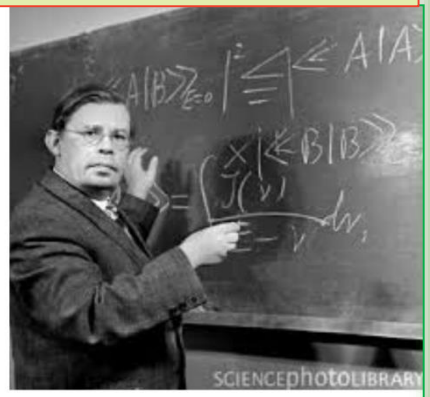
Описано топологічні, метричні та фрактальні властивості множин анормальних чисел, доведено ряд критеріїв аномальної фрактальності, суперфрактальності

Проблема фон Неймана-Дея

John von Neumann

Дискретні групи, 1929 р.





Nikolay Nikolayevich Bogolyubov

Топологічні групи, 1939 р.

AG - клас аменабельних груп.

<u>Теорема Боголюбова М.М.</u> (1939 р.)
Група G аменабельна тоді й тільки тоді, коли для неперервної довільної дії G на компактному просторі X на X існує G-інваріантна борелевська ймовірнісна міра.

EG - клас елементарно аменабельних груп, побудований **фон Нейманом у 1929 році** (містить скінченні, розв'язні, комутативні, нільпотентні та локально скінченні групи).

Клас EG міститься у класі AG.

Проблема (фон Нейман-Дей). Чи вірно, що існують аменабельні, але не елементарно аменабельні групи, тобто $AG = EG$?

<u>Теорема</u> (Григорчук Р.І., 1984 р.)
$AG \neq EG$. Існує континуально багато аменабельних та неелементарно аменабельних груп.

Критерій аменабельності Григорчука Р.І.

Нехай F_m - вільна група рангу $m \geq 2$ з базисом $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, H – підгрупа групи F_m.

$X = F_m/H$ – однорідний простір групи F_m, тобто простір лівих класів суміжності, на якому F_m діє лівим множенням.

$H_n = \{h \epsilon H : |h|_A = n\}$ – множина елементів довжини n в H.

$\alpha_H = \lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|H_n|}$ - показник відносного росту H, $1 \leq \alpha_H \leq 2m - 1$.

$P_{H,H}{}^{(n)}$ – ймовірність повернення в H при випадковому блуканні на X.

$r = \lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{P_{H,H}{}^{(n)}}$ - спектральний радіус випадкового блукання на X.

Теорема (Григорчук Р.І., 1978 р.) *Мають місце співвідношення:*

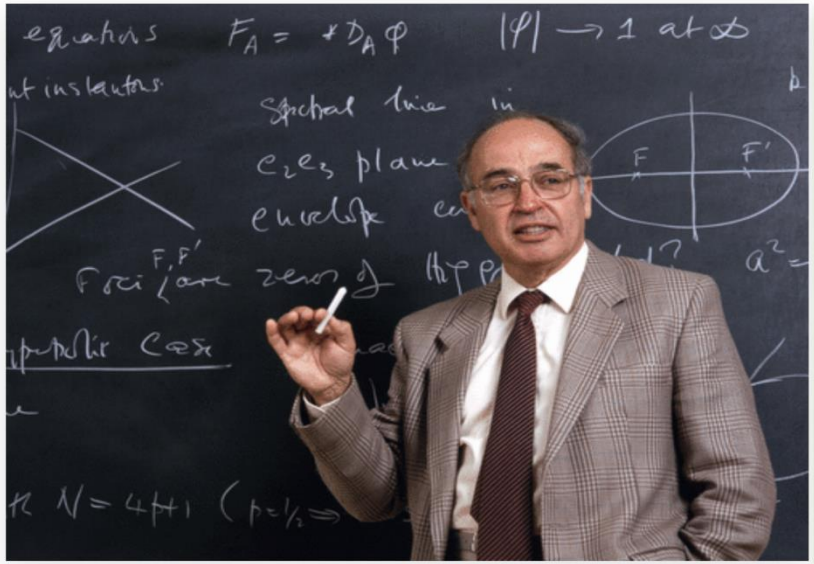
$$r = \begin{cases} \frac{\sqrt{2m-1}}{2m}\left(\frac{\alpha_H}{\sqrt{2m-1}} + \frac{\sqrt{2m-1}}{\alpha_H}\right), & \alpha_H \geq \sqrt{2m-1}, \\ \frac{\sqrt{2m-1}}{m}, & 1 \leq \alpha_H \leq \sqrt{2m-1}. \end{cases}$$

Наслідок. a) Простір $X = F_m/H$ аменабельний $\Leftrightarrow$ $\alpha_H = 2m - 1$.
b) Група $G = F_m/H,\ H \trianglelefteq F_m$ аменабельна $\Leftrightarrow$ $\alpha_H = 2m - 1$.

Застосування. Цей критерій був використаний Р.І. Григорчуком, О.Ю. Ольшанським і С.І. Адяном для побудови контрприкладів різних версій гіпотези фон Неймана-Дея. Також Р.І. Григорчуком побудований контрприклад до гіпотези Дж. Розенблатта про супераменабельність.

Нагородження премією Боголюбова М.М., 2015 р., Київ

Проблема Атьї про L^2-числа Бетті



Лекція М. Атьї (лауреат премії Філдса)

М. Атья (зліва) і Л. Шварц в Японії

Нехай M - замкнутий многовид Рімана.

Числа Бетті введенні М. Атья в 1971 р. При означенні використовується розмірність фон Неймана.

$\beta^i\ (M)$ – звичайні числа Бетті (належать множині натуральних чисел).

$\beta_2^i(M)$ – L^2-числа Бетті (належать множині невід'ємних дійсних чисел).

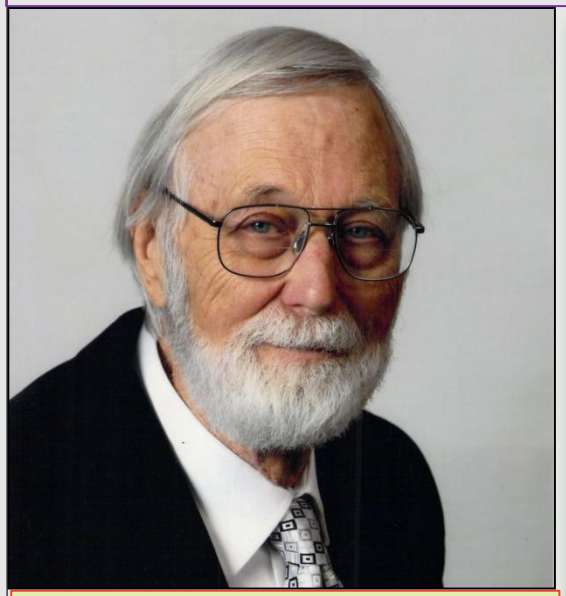
Проблема М. Атьї, 1971 р. Чи існують многовиди з нецілим L^2-числом Бетті ?

Сильна гіпотеза М. Атьї. Для всіх i, L^2-числа Бетті $\beta_2^i(M) \epsilon Z(\frac{1}{N})$, де N - найменше спільне кратне порядків скінченних підгруп фундаментальної групи $\pi_1(M)$.

Теорема (Григорчук, Ліннел, Шик, Жук , 2001 р.)
Існує семивимірний многовид M з нецілим L^2-числом Бетті $\beta_2^3(M) = \frac{1}{3}$.

Застосування. Семивимірний многовид з L^2-числом Бетті $\beta_2^3(M) = \frac{1}{3}$ був використаний як контрприклад до спростування сильної гіпотези М.Атьї.

Ріст в групах і проблема Мілнора



Дж. Мілнор (лауреат премії Філдса)

Теорема (А. Шварц, 1957 р.)
Нехай M – компактний многовид, $\widetilde{M}$ - його універсальне накриття. Тоді ріст $\widetilde{M}$ збігається з ростом фундаментальної групи $\pi_1(M)$.

Нехай G – група, A – система твірних, $\Gamma = \Gamma(G, A)$ - граф Келі

$\gamma_G(n) = |\{g \epsilon G \mid d(1, g) \leq n\}|$ - функція росту, $d(1, g)$ - комбінаторна відстань між 1 та g у графі Келі.

Ріст $\gamma_G(n)$, коли $n \to \infty$, може бути:

- *поліноміальним: $\gamma_G(n) \sim n^d$ (напр., нільпотеннті групи);*
- *експоненційним: $\gamma_G(n) \sim e^n$ (напр., вільні некомутативні групи);*
- *проміжним між поліноміальним та експоненційним.*

Проблема Дж. Мілнора, 1967 р. Чи існують групи проміжного росту?

Георг Фрідріх Бернхард Ріман

Теорема (Григорчук, 1984 р.)
*Так, існує континуально багато груп проміжного росту. Більш того, існує континуально багато степенів груп росту (**основна конструкція таких груп носить назву груп Григорчука**).*

Застосування в Рімановій геометрії. З точністю до квазіізометрії існує континуально багато Ріманових поверхонь S постійної від'ємної кривизни -1 нескінченного роду з одним кінцем і групою ізометрій, що діє на S вільно і кокомпактно.

Проблема О.Кегеля (1963): Чи буде алгебра Лі L розв'язною, якщо L є сумою L=A+B двох своїх нільпотентних підалгебр A і B?

Відповідь: Ні. Над довільним полем характеристики p=2 існують нерозв'язні алгебри Лі з таким розкладом (А.П. Петравчук ,1988)

Застосування сум алгебр Лі:

1) теоретична фізика (M.Flato, D.Sternheimer,1965)
2) геометрія -- абелеві структури на келерових многовидах (M.Barberis, I.Dotti, A.Fino)

Проблема Ж.Фройденбурга (2006): Нехай K – поле характеристики нуль, $A=k[x_1, \dots x_n]$ – кільце многочленів і LND(A) - множина всіх локально нільпотентних диференціювань на A. Чи буде локально нільпотентною алгебра Лі L, яка міститься в LND(A)?

Відповідь: Так У випадку n=2, і у випадку скінченної розмірності алгебри L (А.П.Петравчук, К.Сисак, 2017; А.Скутін для n>2, 2021)

Застосування: локально нільпотентним диференціюванням відповідають автоморфізми відповідних геометричних обєктів, ці автоморфізми тісно пов'язані з симетріями різноманітних геометричних об'єктів. В теорії диференціальних рівнянь наявність достатньої кількості симетрій рівняння дозволяє понижувати порядок рівняння.

Проблема С.Лі про класифікацію скінченновимірних алгебр Лі векторних полів на многовидах малої розмірності

Алгебраїчний варіант: класифікувати скінченно вимірні алгебри Лі векторних полів з поліноміальним коефіцієнтами на n-вимірному комплексному просторі. Для n=1 і для n=2 такі алгебри були класифіковані С.Лі.

Для n≥4 класифікаційна задача дика, оскільки містить безнадійну задачу класифікацію пари квадратних матриць одного і того ж порядку з точністю до подібності (В.Бондаренко, А.Петравчук, 2019). Для n=3 проблема відкрита.

Нові алгебраїчні системи: **дімоноїди**

Jean-Louis Loday

Дімоноїди *виникли в алгебраїчній К-теорії, введені Ж.-Л. Лоде в 2001 році*

Дімоноїд – це множина з двома бінарними операціями $\dashv$ та $\vdash$, які задовольняють такі аксіоми:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z), \qquad (D1)$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \qquad (D2)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \qquad (D3)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \qquad (D4)$$

$$(x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z). \qquad (D5)$$

Застосування дімоноїдів

Теорія діалгебр,
Теорія триалгебр
Гомологічна алгебра,
Теорія графів,
Алгебраїчна К-теорія

Методи побудови вільних дімоноїдів (Жучок А.В., 2011 р.)

$F[X]$ – вільна напівгрупа з вільною базою X, $l(w)$ – довжина слова $w \in F[X]$. На множині

$$F = \{(w, m) \in F[X] \times N \mid l(w) \geq m\}$$

введемо операції $\dashv$ та $\vdash$ за правилами:

$$(w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2) = (w_1 w_2, m_1), \qquad (*)$$

$$(w_1, m_1) \vdash (w_2, m_2) = (w_1 w_2, l(w_1) + m_2) \qquad (**)$$

для всіх $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in F$.

Теорема. *Множина F з операціями $\dashv, \vdash$, що визначаються умовами (*), (**), є вільним дімоноїдом.*

Нові алгебраїчні системи: **тріоїди**

***Тріоїди** виникли в алгебраїчній топології, введені Ж.-Л. Лоде та М.О. Ронко, 2004р.*

Тріоїд – множина з визначеними на ній трьома бінарними асоціативними операціями $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$, які задовольняють аксіоми:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \quad (T1) \qquad (x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \quad (T5)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \quad (T2) \qquad (x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \quad (T6)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \quad (T3) \qquad (x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \quad (T7)$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), \quad (T4) \qquad (x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) \quad (T8)$$

María O. Ronko

Застосування тріоїдів

Теорія діалгебр,
Теорія триалгебр
Теорія графів,
Топологія,
Гомологічна алгебра

Методи побудови вільних тріоїдів (Жучок А.В., 2015 р.)

Для будь-яких $n, k \in \mathbb{N}$ та $L \subseteq \{1, \ldots, n\}, L \neq \varnothing$, вважаємо $L + k = \{y + k \mid y \in L\}$. Визначимо операції $\dashv'$, $\vdash'$ та $\perp'$ на множині $F = \{(w, L) \mid w \in F[X], L \subseteq \{1, \ldots, l(w)\}, L \neq \varnothing\}$ за правилами:

$$(w, L) \dashv' (u, R) = (wu, L), \; (w, L) \vdash' (u, R) = (wu, R + l(w)),$$

$$(w, L) \perp' (u, R) = (wu, L \cup (R + l(w)))$$

для всіх $(w, L), (u, R) \in F$.

Теорема. $(F, \dashv', \vdash', \perp')$ – *вільний тріоїд.*

Нові алгебраїчні системи: **допельнапівгрупи**

Birgit Richter

Допельнапівгрупи *виникли в алгебраїчній топології, введені Б. Ріхтер, 1997 р.*

Допельнапівгрупа – множина, наділена двома бінарними операціями $\dashv$ та $\vdash$, які задовольняють аксіоми:

$$(x \dashv y) \vdash z = x \dashv (y \vdash z), \qquad (D1)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \qquad (D2)$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z), \qquad (D3)$$

$$(x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z). \qquad (D4)$$

Методи побудови вільних допельнапівгруп (Жучок А.В., 2017 р.)

T – вільний моноїд на множині $\{a, b\}$. Визначимо операції $\dashv$ та $\vdash$ на множині

$$F = \{(w, u) \in F[X] \times T \mid l(w) - l(u) = 1\}$$

за правилами:

$$(w_1, u_1) \dashv (w_2, u_2) = (w_1 w_2, u_1 a u_2), \ (w_1, u_1) \vdash (w_2, u_2) = (w_1 w_2, u_1 b u_2)$$

для всіх $(w_1, u_1), (w_2, u_2) \in F$.

Теорема. $(F, \dashv, \vdash)$ *є вільною допельнапівгрупою.*

Застосування допельнапівгруп

Теорія напівгруп,
Теорія графів,
Топологія,
Теорія допельалгебр,
Універсальна алгебра

Нові алгебраїчні системи: **g-дімоноїди**

g-дімоноїди *були введені Ю.Мовсисяном, С.Давидовим та М.Сафаряном, 2014 р.*

g-дімоноїд – це множина з двома бінарними операціями $\dashv$ та $\vdash$, які задовольняють такі аксіоми:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z), \qquad (D1)$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \qquad (D2)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \qquad (D3)$$

$$(x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z). \qquad (D4)$$

Проблема Плоткіна Б.І. про опис автоморфізмів напівгруп ендоморфізмів вільних алгебр

Нехай $\mathfrak{FCD}_X^g$ – вільний комутативний g-дімоноїд на множині X, $End(\mathfrak{FCD}_X^g)$ – його напівгрупа ендоморфізмів.

Автоморфізм $\Phi : End(\mathfrak{FCD}_X^g) \to End(\mathfrak{FCD}_X^g)$ є *квазівнутрішнім*, якщо існує підстановка α алгебри $\mathfrak{FCD}_X^g$ така, що $\beta\Phi = \alpha^{-1}\beta\alpha$ для всіх $\beta \in End(\mathfrak{FCD}_X^g)$.

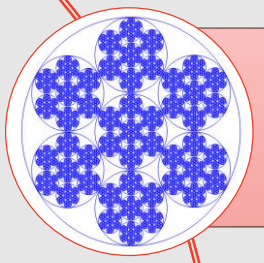
Теорема (Жучок Ю.В., 2016 р.) *Нехай X – довільна множина потужності ≥ 2. Тоді*

(i) *всі автоморфізми напівгрупи $End(\mathfrak{FCD}_X^g)$ є квазівнутрішніми;*

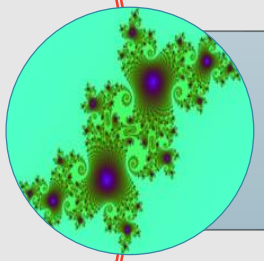
(ii) *група автоморфізмів $Aut(End(\mathfrak{FCD}_X^g))$ ізоморфна прямому добутку $S(X) \times C_2$ симетричної групи $S(X)$ та 2-елементної групи C_2.*

Плоткін Б.І.

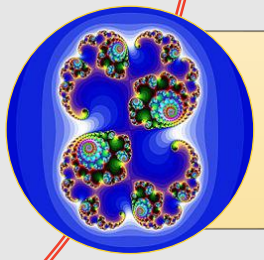
Концептуальні засади досліджень у галузі сучасної тополого-метричної та статистичної теорії чисел



Дослідження підпорядковані проблемам аналітичного, тополого-метричного, статистичного і фрактального аналізу числових множин, послідовностей та рядів, розподілів випадкових величин, об'єктів теорії фракталів



Грунтовний аналіз локально складних математичних об'єків (множин, функцій, мір, динамічних систем) з фрактальними властивостями передбачає наявність адекватних засобів їх аналітичного задання та вивчення, що забезпечується ефективними системами координатизації



Основна ідея розвитку теорії поляає у вдосконалені існуючих і створені нових систем кодування дійсних чисел (тобто в урізноманітнені форм існування чисел), на яких базуються системи координатизації точок простору

Загальні проблеми, вирішенню яких присвячені дослідження в галузі теорії дійсних чисел

- Проблема наявності ефективних форм існування дійсних чисел (системи зображення чисел)
- Проблема аналітичного опису математичних об'єків зі складною тополого-метричною структурою: функції, перетворення, міри, динамічні системи
- Проблема нормальних властивостей чисел. Проблема нуль-мірності, аномальної фрактальності та суперфрактальності числових множин
- Проблема обчислення фрактальної розмірності числових множин, довірчості систем покриттів
- Проблема структури ймовірнісної міри та сингулярного розподілу випадкової величини

Системи кодування дійсних чисел засобами скінченного, нескінченного, сталого та змінного алфавіту A

***Засоби*:** A – **алфавіт** (набір цифр), $\mathrm{L} = A \times A \times \cdots$ – простір послідовностей елементів алфавіту

Означення: g-**Кодуванням (g -зображенням)** чисел множини D засобами алфавіту A називається сюр'єктивне відображення: $\boldsymbol{L} \ni (\boldsymbol{\alpha_n}) \xrightarrow{g} \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$.

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Delta^{g}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}}$ -- g-зображення числа x, α_n – n-та цифра g-зображення.

g-кодування має <u>*нульову надлишковість*</u>, якщо кожне число має не більше двох зображень.

Двосимвольні системи кодування чисел використовують алфавіт $A = \{0; 1\}$, є технічно зручними і заслуговують на окрему увагу. У дослідженнях авторів використовувалось близько 20 двосимвольних систем кодування чисел, 10 з яких були нововведеними (серед них Q_2^* -зображення, G_2-зображення, медіантне, марківське зображення, ланцюгове A_2 -зображення)

Кожна з систем кодування має свою **геометрію**, **тополого-метричну**, **стохастичну і фрактальну теорії** та широкий спектр застосувань у різних галузях математики та за її межами.

Системи кодування дійсних чисел засобами скінченного, нескінченного, сталого та змінного алфавіту A

Простір L послідовностей елементів алфавіту А

Запропоновано низку метризацій простору L.

Описано групи перетворень простору , що зберігають хвости послідовностей, частоти цифр

Кодування чисел множини D засобами алфавіту як сюр'єктивне відображення g: $L \to D$

розвивається в таких напрямах

Геометрія g-зображення

Метрична теорія чисел у їх g-зображенні

Ймовірнісна теорія чисел

Системи кодування чисел відрізка $[0; 1]$

Зі скінченним і нескінченним, змінним і сталим алфавітом;

з нульовою і ненульовою надлишковістю;

У формі ряду, нескінченного добутку, ланцюгового дробу

Застосування до аналітичного опису та задання локально складних неперервних мір та функцій (сингулярних, ніде не монотонних) тощо.

Геометрія g-зображення чисел

Геометрія чисел займається розв'язанням теоретико-числових проблем з використанням геометричних засобів. *Геометрія g-зображення* чисел вивчає геометричний зміст цифр, властивості циліндричних та хвостових множин, метричні відношення тощо. Для багатьох принципово різних систем кодування чисел авторами вивчено геометрію.

Магістральним напрямом сучасних наукових досліджень є *«геометрія числових рядів»*, яка займається вивченням тополого-метричних і фрактальних властивостей множин неповних сум (підсум) збіжних числових рядів. Авторами вивчено тополого-метричні і фрактальні властивості підсум класів рядів з різними властивостями однорідності і знайдено їх застосування у теорії нескінченних згорток Бернуллі, теорії сингулярних функцій та мір.

Метрична теорія g-зображення

Метрична теорія чисел займається розв'язанням теоретико-числових проблем з використанням структур метричних (нормованих) просторів і засобів теорії міри.

Ядро метричної теорії g-зображення чисел складають задачі про міри множин чисел, визначених умовами на їх g-зображення, однією з яких є задача про нуль-мірність множини та її фрактальну розмірність (типу Гаусдофа-Безиковича тощо).

Ключові поняття і факти **метричної теорії**:

1. **g-Циліндр** рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$

$$\Delta^g_{c_1 \dots c_m} = \{x : g_i(x) = c_i, i = \overline{1, m}\};$$

2. **Основне метричне відношення**

$$\frac{|\Delta^g_{c_1 \dots c_m i}|}{|\Delta^g_{c_1 \dots c_m}|} \equiv \rho[(c_1, \dots, c_m); m, i]$$

Теорема. Міра Лебега континуальної замкненої множини $E \subset [0; 1]$:

$$\lambda(E) = \lambda(E_1) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_{n+1})}{\lambda(E_n)} = \lambda(E_1) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(E_n \backslash E_{n+1})}{\lambda(E_n)}\right).$$

де E_k - об'єднання g-циліндрів k-го рангу, серед внутрішніх точок яких є точки множини E.

Наслідок. $\lambda(E) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_n \backslash E_{n+1})}{\lambda(E_n)} = \infty$.

Нормальні властивості чисел (нормальність чисел)

Властивість $\mathcal{B}$ числа $x \in [0;1]$ називається ***нормальною***, якщо її мають майже всі (у розумінні міри Лебега) числа цієї множини, тобто множина чисел, які її не мають, є нуль-множиною Лебега. Авторами знайдено низку ознак нормальності чисел у різних системах їх кодування.

Узагальнення теореми Бореля

Якщо $|\mathrm{A}| = \mathrm{s} \geq 2$, $\rho[(c_1, \dots, c_m); m, i] = q_i, \forall \quad i \in A$, $m \in N$, то міра Лебега множини $E[Q_s; q_0, \dots, q_{s-1}]$ чисел $x = \Delta^g_{g_1 g_2 \dots g_k \dots}$ таких, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_i(x,n)}{n} = q_i, \qquad N_i(x,n) = \#\{j: g_j = i, j \leq n\}$$

дорівнює 1 (E – множина повної міри Лебега).

Стохастична теорія g–зображення

Основні об'єкти ймовірнісної теорії g-зображення чисел: випадкові величини

$$\xi = \Delta^g_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots} \text{ і } (\xi_k)$$

Задачі:

- 1. За розподілом в.в. ξ вивчити розподіли її цифр (ξ_k) ;
- 2. За відомими розподілами цифр (ξ_k) (і їх залежностями або незалежністю) вивчити структурні, спектральні, тополого-метричні і фрактальні властивості ξ.

Результати:

- отримано ряд узагальнень та аналогів класичних теорем, зокрема П.Леві та Джессена-Вінтнера з повним поглибленням (критерії),
- теореми про структуру сингулярно розподіленої в.в. ξ для різних систем кодувань чисел,
- опис фрактальних властивостей спектрів і суттєвих носіїв щільності розподілу

Системи кодування дійсних чисел

Нехай $2 \leq s$ – фіксоване натуральне число; $A_s = \{0,1, \dots . s-1\}$ – алфавіт, $(q_0, q_1, \dots, q_{s-1})$ – впорядкований набір додатних чисел, $q_0 + \ \dots + q_{s-1} = 1$.

Теорема. Для будь-якого числа $x \in [0;1]$ існує послідовність $(\alpha_k) \in L$ така, що

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}) \ ,$$

де $\beta_0 = 0, \beta_i = \beta_{i-1} + q_{i-1}$.

Теорема (про нормальну властивість числа). Для майже всіх $x \in [0;1]$ $\nu_i^{Q_s}(x) = q_i$, $i \in A$.

Теорема. В.в. $\xi = \Delta^{Q_s}_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}$, цифри (ξ_n) якої є незалежними набувають значень 0,1,…, s-1 з ймовірностями $p_{on}, p_{1n}, \dots, p_{s-1,n}$ відповідно має чистий лебегівський тип розподілу, причому абсолютно неперервний тоді і тільки тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{s-1} \left(1 - q_i^{-1} p_{in}\right)^2 < \infty$$

і сингулярним в протилежному випадку.

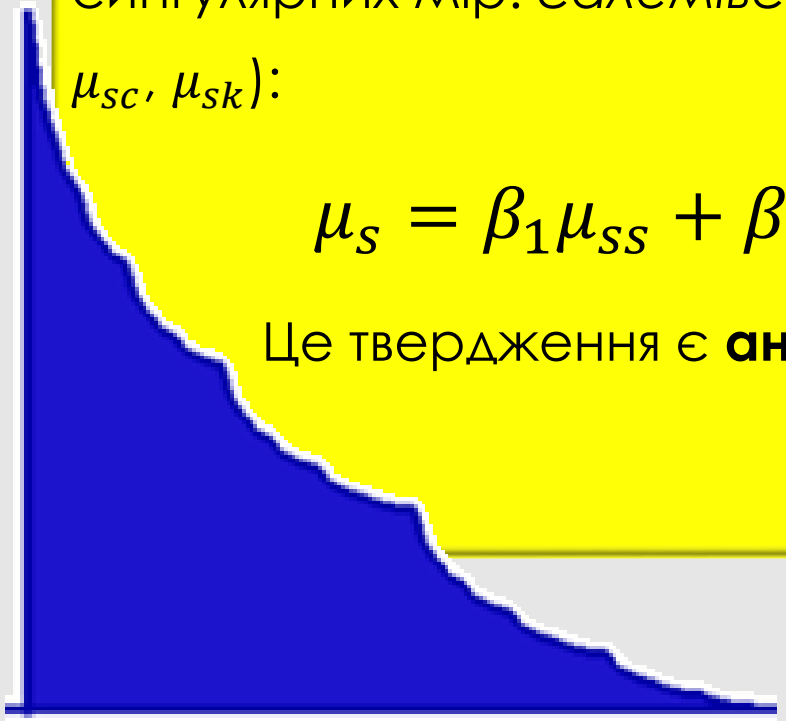
Класифікація сингулярних мір

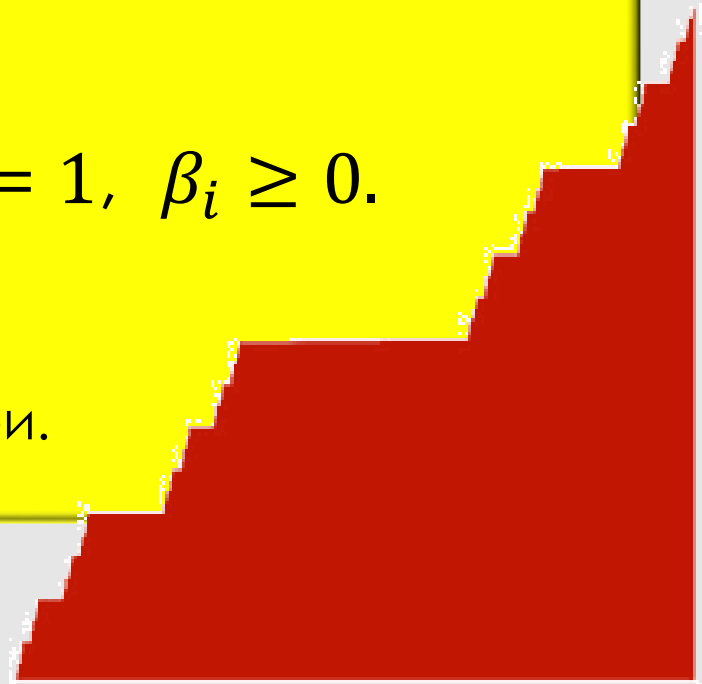
Запроваджено **класифікацію** сингулярних ймовірнісних мір *за тополого-метричниними властивостями спектра* —мінімального замкненого носія, що грунтується на отриманому розкладі міри μ_s у лінійну комбінацію трьох сингулярних мір: *салемівського*, *канторівського* та *квазіканторівського* типів (μ_{ss}, μ_{sc}, μ_{sk}):

$$\mu_s = \beta_1\mu_{ss} + \beta_2\mu_{sc} + \beta_3\mu_{sk}\ ,\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1,\ \ \beta_i \geq 0.$$

Це твердження є **аналогом теореми Лебега**

про структуру ймовірнісної міри.





g-зображення чисел і теорія фракталів

- Обчислення або оцінка фрактальної розмірності (Гаусдорфа-Безиковича) числових множин, визначених умовами на їх g-зображення;
- Проблема довірчості класу покриттів для обчислення розмірності;
- Функції і перетворення, що зберігають фрактальну розмірність;
- Аналітичний опис фрактальних об'єктів з використанням різних систем кодування чисел

$$K = \left\{ M(x;y) : x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, y = \Delta^{Q_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}, \alpha_n + \beta_n \leq 1 \right\}.$$

Групи і теорія фракталів

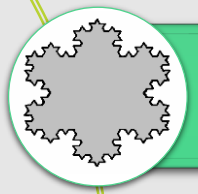
Введено в розгляд і досліджено наступні групи бієктивних відображень простору на себе (=перетворень простору), вивчено їх інваріанти, взаємозв'язки та застосування:

- Група неперервних перетворень (бієкцій), що зберігають фрактальну розмірність (DP-перетворення)
- Група перетворень, що зберігають частоти цифр зображення чисел
- Група перетворень, що зберігають хвости зображення чисел у різних системах кодування
- Група зростаючих сингулярних функцій (типу Салема).

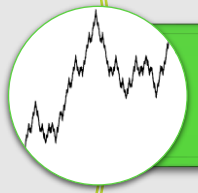
Авторами запропоновано *груповий погляд на фрактальну геометрію* як теорію інваріантів групи перетворень метричного простору, які зберігають фрактальну розмірність.

Теорія дійсних чисел з використанням різних систем зображення має широке застосування

У геометрії чисел та числових рядів (розв'язання теоретико-числових проблем з використанням геометричних засобів)



У теорії фракталів. Міра Гаусдорфа. Розмірність Гаусдорфа-Безиковича



У теорії неперервних функцій з локально складною структурою (ніде не монотонних, недиференційовних та сингулярних)

У теорії розподілів випадкових величини. Лебегівська структура ймовірнісної міри. Теорія сингулярних розподілів

Фрактальні числові множини

Узагальнення теорем Безиковича- Егглстона. Множина

$$E[Q_s;(p_0,\dots,p_{s-1})] = \{x \in [0;g_0): \nu_i^{Q_s}(x) = p_i \geq 0,\ i = \overline{0,s-1}\}$$

квазінормальних чисел є всюди щільною у $[0;1]$, має нульову міру Лебега, якщо $p_i \neq q_i$ для деякого $i \in A_s$, її розмірність Гаусдорфа-Безиковича дорівнює:

$$\alpha_0(E) = \frac{\ln p_0^{p_0} p_1^{p_1} \dots p_{s-1}^{p_{s-1}}}{\ln q_0^{p_0} q_1^{p_1} \dots q_{s-1}^{p_{s-1}}}.$$

Для різних систем кодування чисел доведено суперфрактальність множин анормальних чисел.

Ланцюгове A_2-зображення

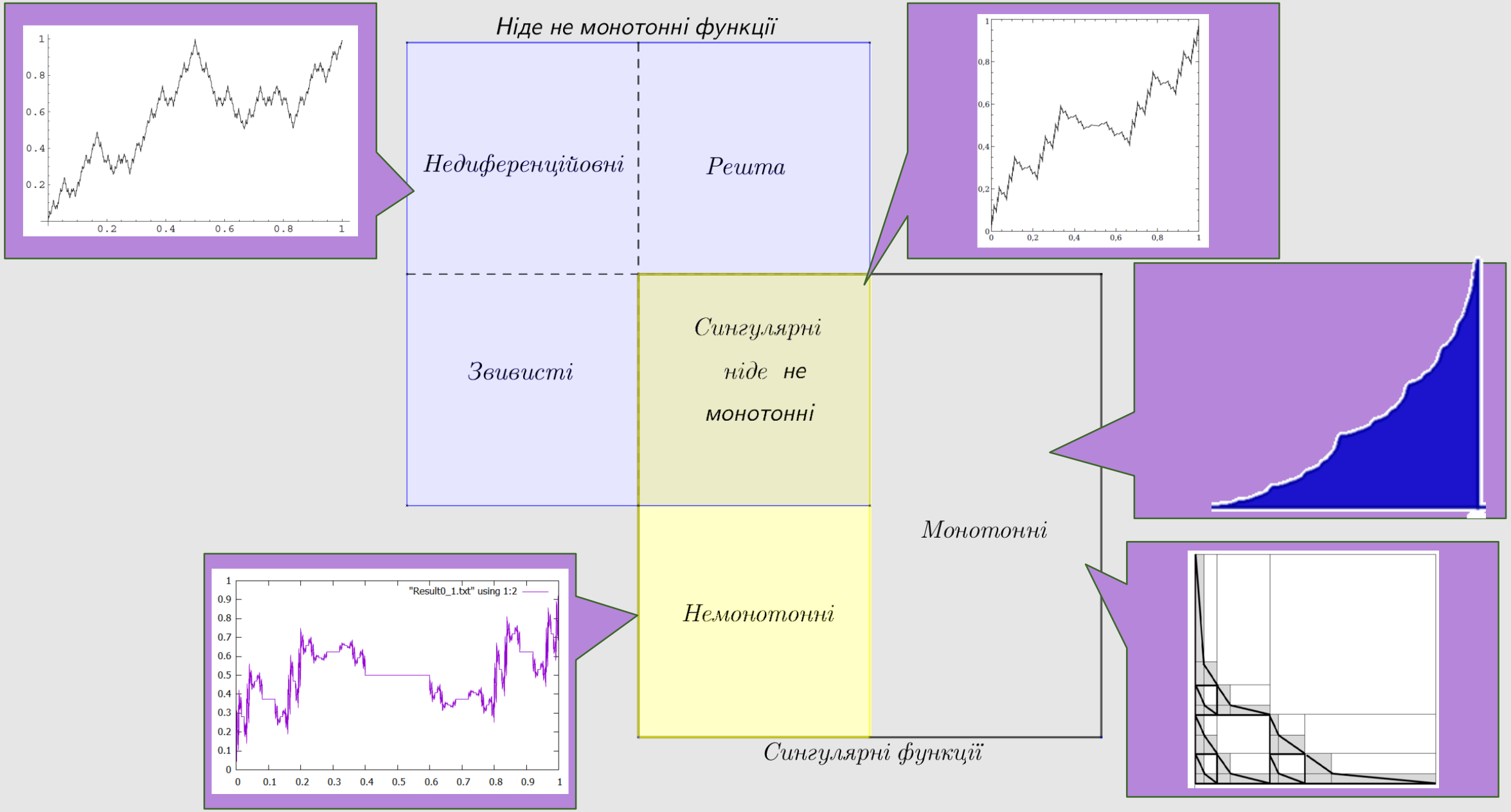
Теорема. Якщо $\alpha_1\alpha_2 \leq \frac{1}{2}$, то для будь-якого $x \in [\beta_1, \beta_2]$ існує послідовність елементів алфавіту (a_n) така, що

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots}}}} = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$$

Система A_2-кодування чисел має нульову надлишковість.

Теорема. Множина всіх неперервних перетворень відрізка [0.5;1], які зберігають хвости ланцюгового A_2-зображення чисел, відносно операції «суперпозиція функцій» утворює нескінченну некомутативну групу, що є підгрупою групи всіх неперервних перетворень.

Теорема. Випадкова величина, цифри ланцюгового A_2 -зображення якої є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, має сингулярний розподіл, тобто розподіл, що зосереджений на множину нульової міри Лебега.


Ніде не монотонні функції
Недиференційовні
Решта
Звивисті
Сингулярні ніде не монотонні
Монотонні
Немонотонні
Сингулярні функції
"Result0_1.txt" using 1:2

Апробація результатів роботи та їх значимість

Наукові результати, представлені в роботі циклу, широко відомі провідним світовим фахівцям з теорії груп, теорії напівгруп, теорії алгебр Лі та їх узагальнень, теорії діалгебр, теорії фракталів, теорії чисел, теорії функцій, теорії ймовірностей

Результати регулярно доповідалися за кордоном на численних міжнародних конференціях, симпозіумах і конгресах у Сполучених Штатах Америки, Японії, Великобританії, Канаді, Шотландії, Ізраїлі, Франції, Італії, Німеччині, Бельгії, Швеції, Туреччині, Португалії, Австрії, Іспанії, Швеції, Швейцарії, Австралії, Новій Зеландії, Мексиці тощо

«Сучасні методи алгебри і теорії чисел та їх застосування»

Значимість результатів роботи підкреслюється тим, що за її тематикою захищено 12 докторських та 74 кандидатських дисертацій

Результати опубліковано у 16 монографіях та 841 статті, (з яких 9 монографій – у провідних закордонних видавництвах, 347 статей – у провідних англомовних журналах)

ВИСНОВКИ

Отримано революційні результати в теорії груп та областях її застосування, а також ряд важливих результатів у теоріях алгебр Лейбніца, алгебр Лі, структур Лоде, модулів над груповими кільцями, факторизацій груп, тополого-метричній теорії дійсних чисел у різних системах їх кодування, фрактальній теорії дійсних чисел та її численних застосувань

У праці встановлено різноманітні зв'язки теорії груп з багатьма іншими розділами загальної алгебри, динамічними системами, абстрактним гармонійним аналізом, геометрією, теорією графів, дискретною математикою, теорію випадкових блукань, теорією ймовірностей, фрактальною теорією, криптографією тощо.

«Сучасні методи алгебри і теорії чисел та їх застосування»

Результати роботи містять розв'язки цілої серії міжнародних математичних проблем, а також аналоги, узагальнення й розвинення відомих у світі результатів з алгебри і теорії чисел, переважно зарубіжних математиків-алгебраїстів

Використані у роботі методи та їх застосування привели до виникнення й розвинення нових напрямків в теорії груп – теорії самоподібних груп, теорії гіллястих груп, теорії груп ітерованої монодромії, теорії нескінченно вимірних лінійних груп, в універсальній алгебрі – теорії дімоноїдів, дігруп, тріоїдів, алгебр Лейбніца, в фрактальному аналізі – тополого-метричній теорії дійсних чисел у різних системах їх кодування та інших