

Інститут математики НАН України, Київ

Наукова робота представлена на здобуття
премії Президента України для молодих вчених

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Пожарська Катерина Віталіївна, к.ф.-м.н., м.н.с.,
Степанюк Тетяна Анатоліївна, к.ф.-м.н., н.с.,
Янченко Сергій Якович, к.ф.-м.н., с.н.с.

Метою роботи є розв'язання низки актуальних задач теорії наближень, а саме знаходження порядкових оцінок таких важливих апроксимативних характеристик як найкраще наближення, найкраще ортогональне тригонометричне наближення, найкраще M -членне тригонометричне наближення, білінійне наближення, ентропійні числа функціональних компактів на рівні розв'язання конкретних екстремальних задач теорії наближення.

Об'єкт дослідження — класи Нікольського–Бєсова, Соболева, Степанця та їхні узагальнення.

- **Лінійна та нелінійна апроксимація** (R. A. DeVore, D. Dung, W. Hering, H. Triebel, S. Youngsheng, Е. С. Белінський, Р. С. Ісмагілов, С. Б. Кашин, В. Є. Майоров, А. С. Романюк, А. С. Сердюк, О. І. Степанець, В. М. Темляков)
- **Ентропійні числа** (D. Dung, T. Kühn, S. Mayer, A. Pietsch, H. Triebel, T. Ullrich, М. С. Бахвалов, Е. С. Белінський, М. Ш. Бірман, Б. С. Кашин, А. С. Романюк, С. А. Смоляк, М. З. Соломяк, В. М. Темляков)
- **Теорія наближень на сфері, задачі про оптимальний розподіл точок** (J. Beck, W. Chen, H. N. Mhaskar, E. B. Saff, I. H. Sloan, K. B. Stolarsky, R. S. Womersley, H. Wozniakowski)

Актуальність напрямків дослідження

Цитування провідних науковців з даної тематики

Google Академія



Ronald DeVore

Professor of Mathematics, [Texas A&M University](#)
Підтверджена електронна адреса в [math.tamu.edu](#)
[approximation theory](#)

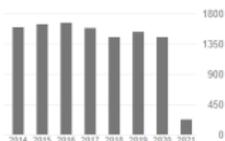
ПІДПИСАТИСЬ

НАЗВА	ПОСИЛАННЯ	РІК
Constructive approximation RA DeVore, GG Lorentz Springer Science & Business Media	3642	1993
A simple proof of the restricted isometry property for random matrices R Baraniuk, M Davenport, R DeVore, M Wakin Constructive Approximation 28 (3), 253-263	2632	2008
Nonlinear approximation RA DeVore Acta numerica 7, 51-150	1519	1998

Посилання

ПЕРЕГЛЯНУТИ ВСІ

	Усі	3 2016
Цитування	28303	7953
h-індекс	67	38
i10-індекс	156	90



Vladimir Temlyakov

University of South Carolina
Підтверджена електронна адреса в [math.sc.edu](#)
[Mathematics](#) [Statistics](#)

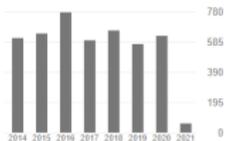
ПІДПИСАТИСЬ

НАЗВА	ПОСИЛАННЯ	РІК
Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise DL Donoho, M Elad, VN Temlyakov IEEE Transactions on information theory 52 (1), 6-18	2534	2005
Some remarks on greedy algorithms RA DeVore, VN Temlyakov Advances in computational Mathematics 5 (1), 173-187	621	1996
Nonlinear Methods of Approximation. VN Temlyakov Foundations of Computational Mathematics 3 (1)	393	2003
Approximations of functions with bounded mixed derivative VN Temlyakov Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova 178, 3-113	392	1996
Hyperbolic cross approximation D Döng, V Temlyakov, T Ullrich Springer	155	2018

Посилання

ПЕРЕГЛЯНУТИ ВСІ

	Усі	3 2016
Цитування	9701	3304
h-індекс	39	24
i10-індекс	115	65



Актуальність напрямків дослідження

Google Академія



Ian Sloan

Professor of Mathematics, [University of New South Wales](#) (UNSW Australia)

Підтверджена електронна адреса в [unsw.edu.au](#)

Numerical analysis approximation theory theoretical physics

ПІДПИСАТИСЬ

НАЗВА

ПОСИЛАННЯ

РІК

Lattice methods for multiple integration

IH Sloan, IH Sloan, S Joe
Oxford University Press

845

1994

When are quasi-Monte Carlo algorithms efficient for high dimensional integrals?

IH Sloan, H Wozniakowski
Journal of Complexity 14 (1), 1-33

694

1998

High-dimensional integration: the quasi-Monte Carlo way

J Dick, FY Kuo, IH Sloan
Acta Numerica 22, 133

525

2013

How good can polynomial interpolation on the sphere be?

RS Womersley, IH Sloan
Advances in Computational Mathematics 14 (3), 195-226

137

2001

Numerical integration on the sphere

K Hesse, IH Sloan, RS Womersley
Handbook of geomathematics

106

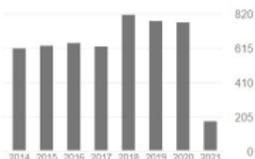
2010

Посилання

ПЕРЕГЛЯНУТИ ВСІ

Усі 3 2016

Цитування	13574	3810
h-індекс	62	30
i10-індекс	208	82



Основні результати роботи

- Знайдено порядкові оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C_{\beta,p}^{\psi}$, $1 \leq p < \infty$, у метриці простору C у випадку, коли функція $g_p(t) = \psi(t)t^{1/p}$, $g_p \in M_0$. Аналогічні оцінки одержано у метриках просторів L_s , $1 < s \leq \infty$, для класів $L_{\beta,1}^{\psi}$.
- Отримано порядкові рівності для найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами класів $C_{\beta,p}^{\psi}$, $1 \leq p < \infty$, у випадку, коли ψ належать до множини M''_{∞} .
- Знайдено точні порядкові оцінки найкращих m -членних тригонометричних наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C_{\beta,p}^{\psi}$, у метриках просторів L_s , при всіх $1 \leq p, s \leq \infty$, і $\beta \in \mathbb{R}$ у випадку, коли M'_{∞} .
- Встановлено асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилення наближень сумами Фур'є в рівномірній метриці на класах узагальнених інтегралів Пуассона $C_{\beta,p}^{\alpha,r}$, $0 < r < 1$.

Основні результати роботи

- Досліджено поведінка найгіршої похибки чисельного інтегрування на одиничній сфері в просторі \mathbb{R}^{d+1} , $d \geq 2$, для класів $H^{(d/2, \gamma)}$, $\gamma > 1/2$, неперервних функцій на сфері з додатковим логарифмічним множником. Для цих класів отримано аналогічні верхні та нижні оцінки для “найгіршої” похибки чисельного інтегрування.
- Порівняно оцінки енергій для певних ймовірнісних та визначених (детермінантних) точкових множин (сферичні t -дизайни, та точкові множини, які мінімізують енергію). Також отримано асимптотичні рівності для дискретної s -енергії Рісса для послідовності добре розподілених t -дизайнів на одиничній сфері.
- Досліджено апроксимативні властивості інтегралів Пуассона, бігармонійних інтегралів Пуассона та інтегралів Вейерштраса на деяких класах періодичних диференційовних функцій.
- Встановлено порядкові оцінки найкращих ортогональних та M -членних тригонометричних наближень періодичних функцій багатьох змінних, які при певному виборі кратної послідовності, за допомогою якої вони означені, збігаються з аналогами ядер Бернуллі. При цьому виявлено відмінності у поведінці відповідних апроксимативних характеристик у просторах Лебега.

Основні результати роботи

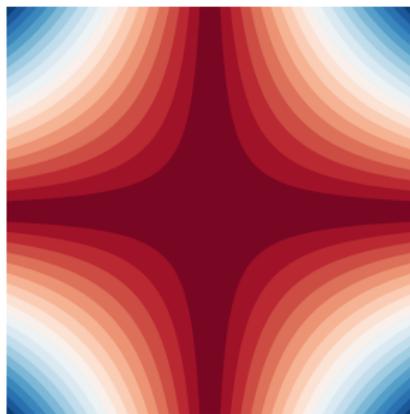
- Одержано порядкові оцінки найкращих тригонометричних наближень класів типу Вейля–Надя у метриці простору Лебега для критичного значення одного з параметрів цих класів та у випадку так званої “малої гладкості” досліджуваних функцій. Виявлено випадки, коли оцінки найкращих M -членних тригонометричних наближень кращі за порядком, ніж оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та наближень за допомогою тригонометричних поліномів з “номерами” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.
- Знайдено порядкові оцінки найкращих білінійних наближень класів періодичних функцій $2d$ змінних, які породжені функціями d змінних із класів типу Вейля–Надя, всеможливими зсувами їхнього аргументу, при цьому похибку наближення оцінено у метриці простору Лебега.
- Встановлено порядкові оцінки ентропійних чисел класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних типу Нікольського–Бесова, які визначаються мажорантною функцією для їхнього мішаного модуля неперервності, у метриці простору Лебега та у рівномірній метриці.
- Встановлено точні за порядком оцінки наближення класів функцій Нікольського–Бесова $S_1^r H(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур’є у східчастому гіперболічному хресті, при цьому похибку наближення оцінено у метриці простору Лебега.

Основні результати роботи

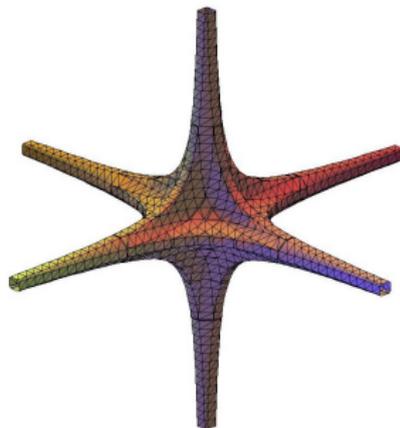
- Отримані точні за порядком оцінки найкращого наближення функцій з класів Нікольського-Бесова $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ у рівномірній метриці.
- Для функцій з узагальнених класів Нікольського-Бесова $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$ одержано точні по порядку оцінки наближення у метриці простору Лебега $L_q(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій з носіями їхнього перетворення Фур'є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функцій Ω .
- Знайдено точні за порядком оцінки найкращого наближення функцій з анізотропних класів Нікольського-Бесова $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ функцій багатьох змінних цілими функціями з носіями їхнього перетворення Фур'є в d -вимірних паралелепіпедах. Також встановлено точні за порядком оцінки відхилення функцій з цих класів від їхніх відрізків інтеграла Фур'є у рівномірній метриці.
- Одержано точні за порядком оцінки наближення ізотропних класів Нікольського-Бесова, неперіодичних функцій багатьох змінних, які визначені на \mathbb{R}^d , за допомогою сум типу Валле Пуссена у рівномірній та інтегральній метриках.

Гіперболічний хрест

$$\Gamma(N) = \left\{ \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : \prod_{j=1}^d \max\{|k_j|, 1\} \leq N \right\}$$



$d = 2$



$d = 3$

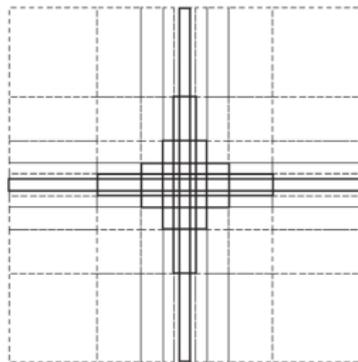
Східчастий гіперболічний хрест

Для $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ покладемо

$$Q_n = \bigcup_{(\mathbf{s}, \mathbf{1}) \leq n} \rho(\mathbf{s}), \quad \text{де } (\mathbf{s}, \mathbf{1}) = s_1 + \dots + s_d,$$

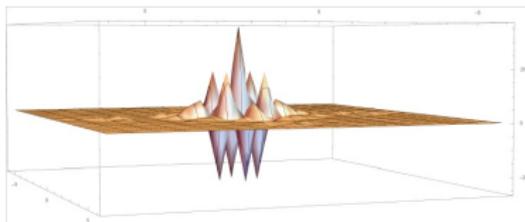
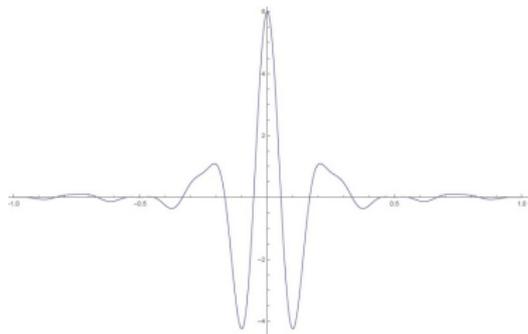
$$\rho(\mathbf{s}) = \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d: 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = 1, \dots, d\}$$

$$|Q_n| \asymp \Gamma(2^n) \asymp 2^n n^{d-1}$$



$d = 2$

“Ядро”, на основі якого будуються екстремальні функції з класу $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$

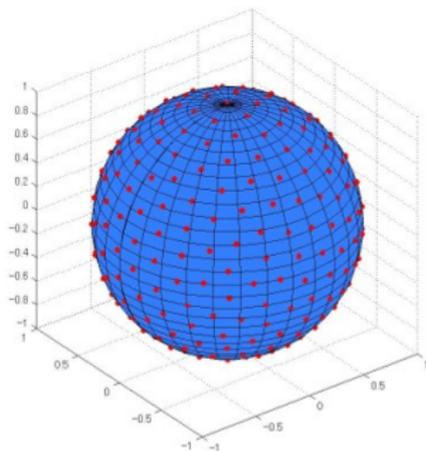


$$A_3^*(x) = \frac{\sin^2 \pi x (2 \cos 8\pi x + \cos 12\pi x)}{2\pi^2 x^2}$$

$$A_{3,3}^*(x_1, x_2) = A_3^*(x_1)A_3^*(x_2)$$

Сферичні t -дизайни

Серед точкових конфігурацій однією з найвідоміших є сферичні t -дизайни, введені у 1977 р. Р. Delsarte, J. M. Goethals і J. J. Seidel.



Сферичні t -дизайни з $d = (t + 1)^2$ точками
(X. Chen, R. Womersley)

Робота складається з 74 наукових праць, опублікованих у 2013–2019 роках, серед яких 33 статті у провідних вітчизняних та міжнародних фахових виданнях та 41 тези конференцій. У міжнародних журналах опубліковано 23 статі, з яких 21 стаття в англомовних журналах з імпаکت-фактором.

Усі публікації є реферованими. У міжнародній наукометричній базі даних Google Scholar 187 цитування, h-індекс = 9; у базі даних SCOPUS 21 публікація, 88 цитувань, h-індекс = 6; в Web of Science 17/32/4; в MathSciNet 25/23/2.

Видання, у яких опубліковані роботи, включені до циклу праць



Вибрані виступи на конференціях, школах

- Third conference “Mathematics for Life Sciences”, Rivne, September 15-19, 2015;
- AMMODIT and final EUMLS Workshop “Mathematics for Life Sciences”, Hasenwinkel, Germany, March 07–11, 2016;
- Hypercomplex Seminar 2016: (Hyper)Complex and Harmonic Dynamical Modelling vs. Special Ternary or Quaternary Nanostructures, and Related Problems, Bedlewo, Poland, June 30 – July 7, 2016;
- 7th European Congress of Mathematics, Berlin, Germany, July 18-22, 2016;
- Third conference “Approximation Methods for Molecular Modelling and Diagnosis Tools”, Kyiv, January 26-30, 2017;
- Workshop Optimal Point Configurations and Orthogonal Polynomials 2017, Castro Urdiales, Spain, April 19-22, 2017;
- International Conference in Approximation Theory, Savannah, USA, May 8-11, 2017;
- Conference “Harmonic Analysis and Applications”, Strobl, Austria, June 4-8, 2018;
- ICERM Semester Program on “Point Configurations in Geometry, Physics and Computer Science”, ICERM, Brown University, USA, February 25 – March 25, 2018;
- Final AMMODIT Conference “Mathematics for Life Sciences”, Kyiv, March 18–22, 2019;

- Міжнародна математична конференція “Боголюбівські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка, Севастополь, 23-30 червня 2013 року;
- IV міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. 30 червня – 5 липня 2014 р., Чернівці;
- Міжнародна конференція “Теорія наближення функцій та її застосування”, присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця, Слов’янськ, 28 травня – 3 червня 2017;
- Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського, Київ, 7-10 червня 2017 року;
- Міжнародна конференція “Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV”, присвячена 100-річчю з дня народження В.К. Дзядика (1919-1998), Світязь (Волинська обл.), 20-26 червня 2019.