Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Львівська політехніка»

ТЕРМОПРУЖНІСТЬ ШАРУВАТИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ ЗА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ З ДОВКІЛЛЯМ

(цикл наукових праць)

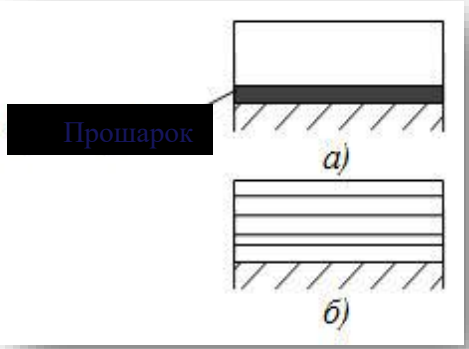
РАКОЧА Ірина Ігорівна, кандидат технічних наук, асистент кафедри прикладної математики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка» МОН України

ГОРУН Олег Павлович, кандидат фізико-математичних наук, молодший науковий співробітник відділу термомеханіки Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

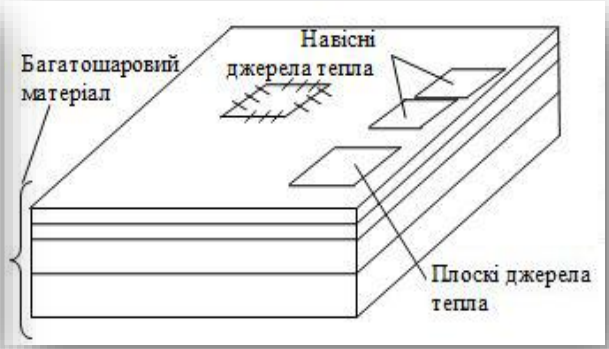
Львів – 2017

Актуальність

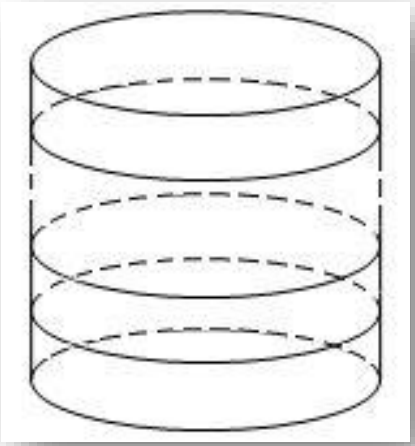
Приклади моделювання елементів конструкцій багатошаровими циліндрами

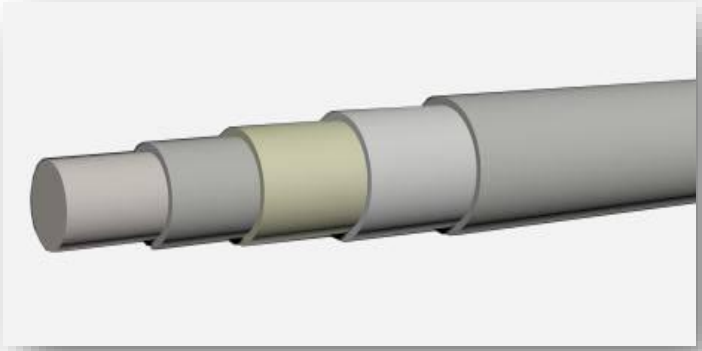


Багатошарове покриття

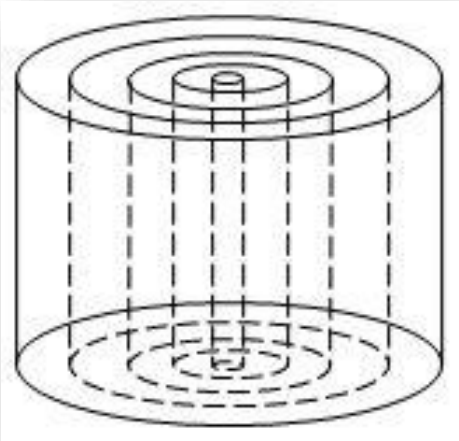


Мікроелектронний елемент





Багатошарова труба



Зв’язок роботи з науковими програмами

- Держбюджетна тема «Побудова і дослідження методів розв’язування задач прикладної математики та інформатики», № держреєстрації 0113U005296;
- Держбюджетна тема «Дослідження проблем керування тепловими і термопружними полями в композитних конструкціях», № держреєстрації 0115U002935;
- Держбюджетна тема «Математичне моделювання та аналітично-чисельне визначення теплового і напруженого станів з урахуванням неоднорідностей їх структури», № держреєстрації 0110U004821;
- Держбюджетна тема «Аналітично-чисельні методи в математичних моделях механіки зв’язаних полів стосовно технічних і медичних проблем», № держреєстрації 0111U009687;
- Держбюджетна тема «Розробка програмного комплексу дослідження напружено-деформованого стану неоднорідних і багатошарових тіл стосовно проектування мікроелектронних систем», № держреєстрації 0114U005082;
- Держбюджетна тема «Моделювання та розроблення методів розрахунку напружено-деформованого стану структурно-неоднорідних тіл за дії теплових та силових чинників», № держреєстрації 0112U007254.

Наукові та практичні результати праць використані у відділі фізичних основ руйнування та міцності матеріалів в агресивних середовищах Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка Національної академії наук України при вирішенні науково-технічних задач оцінювання працездатності та ризику руйнування трубопроводів теплоенергетичного призначення та прогнозування можливих експлуатаційних пошкоджень у тришаровому металевому матеріалі, який застосовується при виготовленні корпусів енергетичних та хімічних реакторів.

Метою циклу є формулювання математичних моделей для визначення усталених розподілів температури та компонент спричиненого нею напружено-деформованого стану в шаруватих по осьовій та радіальній координатах циліндричних тілах, в яких враховуються залежності теплових та механічних характеристик від температури і тепловиділення у шарах та на межах їх контакту, а також розробка методики визначення та дослідження нестаціонарних температурних полів та зумовлених ними квазістатичних напружень і переміщень у плоскошаруватих (трискладових) термочутливих тілах, зокрема з окремими тонкими шарами, без та з урахуванням теплового випромінювання з використанням функції Гріна лінійної нестаціонарної задачі теплопровідності для трискладового простору у вигляді функціональних рядів.

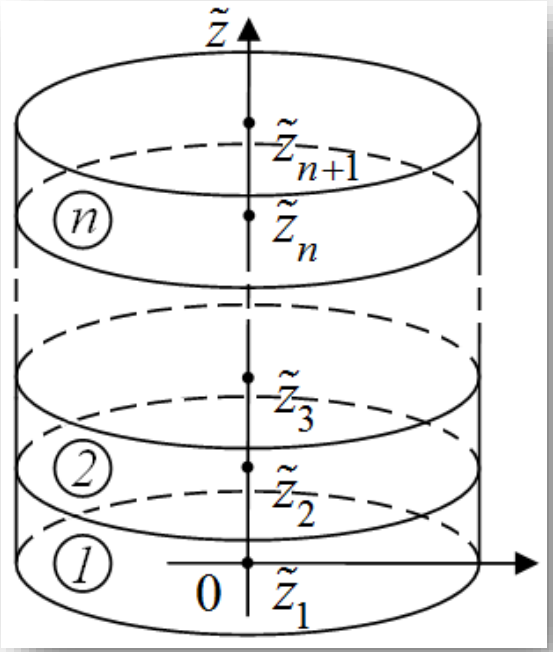
Наукова новизна

1) вперше до розв’язання квазістатичних задач термопружності для трискладових термочутливих тіл запропоновано методику, яка передбачає використання функції Гріна лінійної нестаціонарної задачі теплопровідності для трискладового простору у вигляді функціональних рядів; отримано нові інтегральні подання розв’язків відповідних задач;
2) знайдено розв’язки квазістатичних задач термопружності для трискладових тіл з температурнозалежними та сталими фізико-механічними характеристиками (ФМХ) за різної теплової дії, зокрема, з урахуванням конвективно-променевого теплообміну;
3) узагальнено математичні моделі теплопровідності та термопружності багатошарових за осьовою та радіальною координатами циліндричних тіл за різних класичних умов теплообміну з довкіллям, які на відміну від відомих результатів враховують залежності усіх теплових та механічних характеристик матеріалів від температури та тепловиділення в шарах і на межах їх контакту;
4) розвинуто та апробовано метод розв’язування задач термопружності багатошарових циліндричних тіл за використання перетворення Кірхгофа та прямого інтегрування, який поширено та практично використано для тіл з термочутливих матеріалів за різних умов теплообміну з довкіллям;
5) вперше розроблено математичні моделі теплопровідності та термопружності багатошарових циліндричних тіл із термочутливих матеріалів, які враховують процеси відведення тепла з обмежувальних поверхонь шляхом кипіння чи випаровування рідини, що дозволило у явному вигляді отримати розв’язки нових нелінійних задач та показати ефективність такого тепловідведення.

1. Моделювання температурного на напружено-деформованого станів шаруватих за осьовою координатою циліндрів

Розглядається n-шаровий за осьовою координатою термочутливий циліндр

- на кожній із плоских обмежувальних поверхонь задані певні умови теплообміну;
- у площинах контакту шарів наявні рівномірно розподілені джерела тепла, що створюють теплові потоки;
- у кожному із шарів містяться рівномірно розподілені по нормальних до осі площинах джерела тепла;
- обмежувальні поверхні теплоізольовані (потік тепла у радіальному напрямі відсутній).



Математична модель для визначення розподілу температури містить:

- рівняння теплопровідності

$$\frac{d}{d\tilde{z}}\left(\lambda_t^{(i)}(t_i)\frac{dt_i}{d\tilde{z}}\right) = -W^{(i)}(\tilde{z}), \quad i=\overline{1,n}, \tag{1.1}$$

- умови контакту сусідніх шарів

$$t_i\big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{i+1}} = t_{i+1}\big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{i+1}}, \quad i=\overline{1,n-1}, \tag{1.2}$$

$$\lambda_t^{(i)}(t_i)\frac{dt_i}{d\tilde{z}}\bigg|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{i+1}} = \lambda_t^{(i+1)}(t_{i+1})\frac{dt_{i+1}}{d\tilde{z}}\bigg|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{i+1}} + q^{(i+1)}, \quad i=\overline{1,n-1}, \tag{1.3}$$

де

t_i — абсолютна температура;

$\lambda_t^{(i)}(t_i)$ — залежний від температури коефіцієнт теплопровідності i-го шару циліндра;

$W^{(i)}(\tilde{z})$ — густина джерел тепла в i-му шарі;

$\mathrm{q}^{(i+1)}\left(i=\overline{1,n-1}\right)$ — потоки тепла, що спричиняють тепловиділення на межах сусідніх шарів.

Умови на обмежувальних поверхнях:

- стала температура

$$t_{1,n}\Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{1,n+1}} = \mathrm{t}_{\mathrm{c1,cn}}; \tag{1.4}$$

- сталий тепловий потік

$$\lambda_t^{(1,n)}\frac{dt_{1,n}}{d\tilde{z}}\Bigg|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{1,n+1}} = \mathrm{q}^{(1,n+1)}; \tag{1.5}$$

- конвективно-променевий теплообмін

$$\left[\lambda_t^{(1,n)}\left(t_{1,n}\right)\frac{dt_{1,n}}{d\tilde{z}} + \alpha^{(1,n)}\left(t_{1,n}-\mathrm{t}_{\mathrm{c1,cn}}\right) + \sigma^{(1,n)}\varepsilon^{(1,n)}\left(t_{1,n}^4-\mathrm{t}_{\mathrm{c1,cn}}^4\right)\right]_{\tilde{z}=\tilde{z}_{1,n+1}} = 0; \tag{1.6}$$

- тепловідведення шляхом кипіння рідини на обмежувальних поверхнях

$$\left[\lambda_t^{(1,n)}\left(t_{1,n}\right)\frac{dt_{1,n}}{d\tilde{z}} + \alpha^{(1,n)}\left(t_{1,n}-\mathrm{t}_{\mathrm{c1,cn}}\right) + \mathrm{m}_{\mathrm{boil}}^{(i)}\left(t_n-\mathrm{t}_{\mathrm{boil}}^{(1,n)}\right)^3\right]_{\tilde{z}=\tilde{z}_{1,n+1}} = 0; \tag{1.7}$$

- тепловідведення шляхом випаровування рідини з обмежувальних поверхонь

$$\left[\lambda_t^{(1,n)}\left(t_{1,n}\right)\frac{dt_{1,n}}{d\tilde{z}} + \alpha^{(1,n)}\left(t_{1,n}-\mathrm{t}_{\mathrm{c1,cn}}\right) + \mathrm{m}_{\mathrm{evap}}^{(i)}\left(\frac{\mathrm{p}_{\mathrm{A,sat}}\left(t_{1,n}\right)}{t_{1,n}} - \frac{\mathrm{p}_{\mathrm{A,c}}}{\mathrm{t}_{\mathrm{c1,cn}}}\right)\right]_{\tilde{z}=\tilde{z}_{1,n+1}} = 0; \tag{1.8}$$

Методика побудови розв’язку задачі теплопровідності:

1. Обезрозмірення математичної моделі
2. Здійснення перетворення Кірхгофа
3. Апроксимацію експериментально заданих залежностей коефіцієнтів теплопровідності від температури
4. Побудову розв’язку отриманої задачі на змінні Кірхгофа
5. Здійснення оберненого перетворення Кірхгофа

Математична модель термопружності
шаруватих за осьовою координатою циліндричних тіл

$t = t(\tilde{z})$

- рівняння рівноваги

$$\hat{\sigma}_{ij,j} = 0, \quad (i, j = \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \tag{1.9}$$

- рівняння сумісності деформацій (у напруженнях)

$$\varepsilon_{ijl}\varepsilon_{kmn}\left[\frac{1}{2\mu(t)}\left(\sigma_{lm} - \frac{\lambda(t)}{\beta(t)}\sigma_{pp}\delta_{lm}\right) + \Phi(t)\delta_{lm}\right]_{,jn} = 0, \tag{1.10}$$

де $\mu(t)=\dfrac{E(t)}{2(1+\nu(t))}$, $\lambda(t)=\dfrac{\nu(t)E(t)}{(1+\nu(t))(1-2\nu(t))}$, $\beta(t)=3\lambda(t)+2\mu(t)$.

$$\sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}=\sigma_{\tilde{y}\tilde{y}}=\sigma(\tilde{z}),\quad \sigma_{\tilde{x}\tilde{y}}=\sigma_{\tilde{x}\tilde{z}}=\sigma_{\tilde{y}\tilde{z}}=\sigma_{\tilde{z}\tilde{z}}=0, \tag{1.11}$$

$$\int_{\tilde{z}_i}^{\tilde{z}_{i+1}}\sigma(\tilde{z})d\tilde{z}=0,\quad \int_{\tilde{z}_i}^{\tilde{z}_{i+1}}\tilde{z}\sigma(\tilde{z})d\tilde{z}=0, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1-\nu(\tilde{z})}{E(\tilde{z})}\sigma(\tilde{z})+\Phi(\tilde{z},t)\right)=0. \tag{1.13}$$

$$\tilde{\sigma}(\tilde{z})=\frac{E(\tilde{z},t)}{1-\nu(\tilde{z},t)}\left(\frac{\left(\tilde{A}\tilde{N}_t-\tilde{B}\tilde{M}_t\right)\cdot\tilde{z}+\tilde{A}\tilde{M}_t-\tilde{C}\tilde{N}_t}{\tilde{A}^2-\tilde{B}\tilde{C}}-\Phi(\tilde{z},t)\right), \tag{1.14*}$$

де

$$\tilde{A}=\sum_{i=1}^{2}\int_{\tilde{z}_i}^{\tilde{z}_{i+1}}\frac{\tilde{z}\cdot E_i(t_i)}{1-\nu_i(t_i)}d\tilde{z};\quad \tilde{B}=\sum_{i=1}^{2}\int_{\tilde{z}_i}^{\tilde{z}_{i+1}}\frac{E_i(t_i)}{1-\nu_i(t_i)}d\tilde{z};\quad \tilde{C}=\sum_{i=1}^{2}\int_{\tilde{z}_i}^{\tilde{z}_{i+1}}\frac{\tilde{z}^2\cdot E_i(t_i)}{1-\nu_i(t_i)}d\tilde{z};$$

$$\tilde{N}_t=\sum_{i=1}^{2}\int_{\tilde{z}_i}^{\tilde{z}_{i+1}}\frac{E_i(t_i)\cdot\Phi(t_i)}{1-\nu_i(t_i)}d\tilde{z};\tilde{M}_t=\sum_{i=1}^{2}\int_{\tilde{z}_i}^{\tilde{z}_{i+1}}\frac{E_i(t_i)\cdot\Phi(t_i)}{1-\nu_i(t_i)}\tilde{z}d\tilde{z};\quad \Phi_i(t_i)=\int_{t_p}^{t_i}\alpha_t^{(i)}(t_i)dt_i;$$

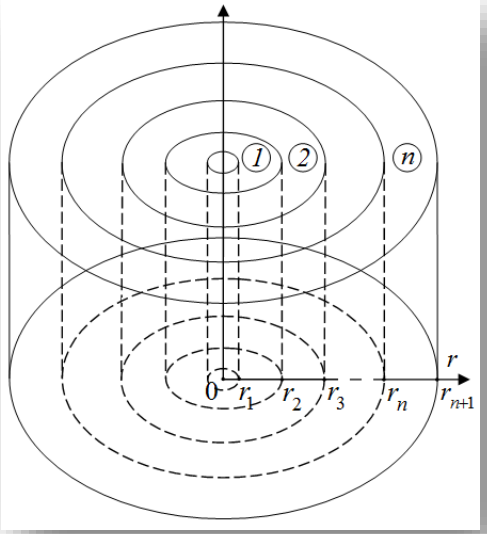
$$\{E(\hat{z},t),\nu(\hat{z},t),\alpha_t(\hat{z},t),\Phi(\hat{z},t)\}=\begin{cases}\left\{E^{(1)}(t_1),\nu^{(1)}(t_1),\alpha_t^{(1)}(t_1),\Phi^{(1)}(t_1)\right\},\hat{z}_1\le\hat{z}<\hat{z}_2,\\ \left\{E^{(2)}(t_2),\nu^{(2)}(t_2),\alpha_t^{(2)}(t_2),\Phi^{(2)}(t_2)\right\},\hat{z}_2\le\hat{z}<\hat{z}_3,\\ \vdots\\ \left\{E^{(n)}(t_n),\nu^{(n)}(t_n),\alpha_t^{(n)}(t_n),\Phi^{(n)}(t_n)\right\},\hat{z}_n\le\hat{z}\le\hat{z}_{n+1}.\end{cases}$$

* *Кушнір Р. М., Попович. В. С.* Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.

Моделювання температурного на напружено-деформованого станів шаруватих за радіальною координатою циліндрів

Розглядається *n*-шаровий за радіальною координатою термочутливий порожнистий циліндр

- на кожній із обмежувальних поверхонь задані певні умови теплообміну;
- у площинах контакту шарів наявні тепловиділення, що створюють теплові потоки;
- у кожному із шарів містяться рівномірно розподілені по нормальних до осі площинах джерела тепла;



Математична модель для визначення розподілу температури містить

- рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\lambda_t^{(i)}(t_i)\frac{dt_i}{dr}\right) = -W^{(i)}(r), \quad i=\overline{1,n}, \tag{1.15}$$

- умови контакту сусідніх шарів

$$t_i\big|_{r=r_{i+1}} = t_{i+1}\big|_{r=r_{i+1}}, \quad i=\overline{1,n-1}, \tag{1.16}$$

$$\lambda_t^{(i)}(t_i)\frac{dt_i}{dr}\bigg|_{r=r_{i+1}} = \lambda_t^{(i+1)}(t_{i+1})\frac{dt_{i+1}}{dr}\bigg|_{r=r_{i+1}} + q^{(i+1)}, \quad i=\overline{1,n-1}. \tag{1.17}$$

Умови на обмежувальних поверхнях:

- стала температура

$$t_{1,n}\Big|_{r=r_{1,n+1}} = \mathrm{t}_{\mathrm{c1,cn}}; \qquad (1.18)$$

- сталий тепловий потік

$$\lambda_t^{(1,n)} \frac{dt_{1,n}}{dr}\Bigg|_{r=r_{1,n+1}} = \mathrm{q}^{(1,n+1)}; \qquad (1.19)$$

- конвективно-променевий теплообмін

$$\left[\lambda_t^{(1,n)}\left(t_{1,n}\right)\frac{dt_{1,n}}{dr} + \alpha^{(1,n)}\left(t_{1,n} - \mathrm{t}_{\mathrm{c1,cn}}\right) + \sigma^{(1,n)}\varepsilon^{(1,n)}\left(t_{1,n}^4 - \mathrm{t}_{\mathrm{c1,cn}}^4\right)\right]_{r=r_{1,n+1}} = 0; \qquad (1.20)$$

- тепловідведення шляхом кипіння рідини на обмежувальних поверхнях

$$\left[\lambda_t^{(1,n)}\left(t_{1,n}\right)\frac{dt_{1,n}}{dr} + \alpha^{(1,n)}\left(t_{1,n} - \mathrm{t}_{\mathrm{c1,cn}}\right) + \mathrm{m}_{\mathrm{boil}}^{(1,n)}\left(t_n - \mathrm{t}_{\mathrm{boil}}^{(1,n)}\right)^3\right]_{r=r_{1,n+1}} = 0; \qquad (1.21)$$

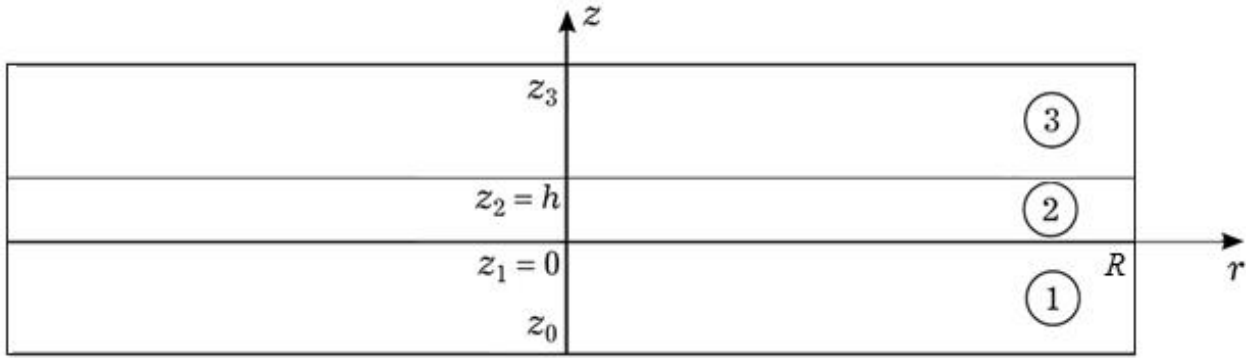
- тепловідведення шляхом випаровування рідини з обмежувальних поверхонь

$$\left[\lambda_t^{(1,n)}\left(t_{1,n}\right)\frac{dt_{1,n}}{dr} + \alpha^{(1,n)}\left(t_{1,n} - \mathrm{t}_{\mathrm{c1,cn}}\right) + \mathrm{m}_{\mathrm{evap}}^{(1,n)}\left(\frac{\mathrm{p}_{\mathrm{A,sat}}\left(t_{1,n}\right)}{t_{1,n}} - \frac{\mathrm{p}_{\mathrm{A,c}}}{\mathrm{t}_{\mathrm{c1,cn}}}\right)\right]_{r=r_{1,n+1}} = 0; \qquad (1.22)$$

2. Дослідження термопружного стану трискладових плоскошаруватих тіл з та без урахування термочутливості за різної теплової дії

Постановка одновимірних задач теплопровідності для трискладових тіл

Розглядається трискладовий термочутливий непрозорий шар, який перебуває під дією залежних від осьової координати z та часу джерел тепла та взаємодіє через обмежуючі поверхні $z = z_0$ і $z = z_3$ з середовищем змінної за часом температури шляхом конвективно-променевого теплообміну. Циліндрична поверхня теплоізольована, а на поверхнях поділу виконуються умови ідеального термомеханічного контакту. В початковий момент часу у кожній складовій задано нерівномірний розподіл температури.



Рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_t^{(i)}(t_i)\frac{\partial t_i}{\partial z}\right] = c_V^{(i)}(t_i)\frac{\partial t_i}{\partial \tau} - w_{t,i}(z,\tau), \quad \left(i = \overline{1,3}\right) \tag{2.1}$$

умови ідеального теплового контакту:

$$t_i(z,\tau)\big|_{z=z_i} = t_{i+1}(z,\tau)\big|_{z=z_i}, \quad \left(\lambda_t^{(i)}(t_i)\frac{\partial t_i(z,\tau)}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=z_i} = \left(\lambda_t^{(i+1)}(t_{i+1})\frac{\partial t_{i+1}(z,\tau)}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=z_i} \tag{2.2}$$

граничні та початкові умови:

$$\left(\lambda_t^{(1)}(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial z}-\varepsilon_1(t_1)\sigma\left[R(t_1)-R\left(t_{c,1}(\tau)\right)\right]-\alpha_1(t_1)\left[t_1-t_{c,1}(\tau)\right]\right)\Bigg|_{z=z_0}=0,$$

$$\left(\lambda_t^{(3)}(t_3)\frac{\partial t_3}{\partial z}+\varepsilon_3(t_3)\sigma\left[R(t_3)-R\left(t_{c,3}(\tau)\right)\right]+\alpha_3(t_3)\left[t_3-t_{c,3}(\tau)\right]\right)\Bigg|_{z=z_3}=0, \quad (2.3)$$

$$t_i\big|_{\tau=0}=t_{0,i}(z), \quad \left(i=\overline{1,3}\right)$$

$R(\eta)=(\eta+273)^4$, $t_{c,1}(\tau)$ та $t_{c,3}(\tau)$ – температури середовищ, з якими відбувається теплообмін через поверхні $z=z_0$ і $z=z_3$ відповідно, $\varepsilon_1(t_1)$, $\varepsilon_3(t_3)$ – ступені чорноти цих поверхонь, $\alpha_1(t_1)$, $\alpha_3(t_3)$ – коефіцієнти теплообміну через ці поверхні, σ – стала Стефана-Больцмана;

Для півбезмежного трискладового тіла ($z_0=-\infty$)

$$t_1(z,\tau)\big|_{z\to-\infty}=0 \qquad (2.4)$$

Для безмежного трискладового тіла ($z_0=-\infty$ і $z_3=\infty$)

$$t_3(z,\tau)\big|_{z\to\infty}=0 \qquad (2.5)$$

Методика розв’язання задач теплопровідності для трискладових тіл

1. часткова лінеаризація задачі з допомогою використання перетворення Кірхгофа;

2. зведення отриманої задачі для системи диференціальних рівнянь відносно змінних Кірхгофа до еквівалентної задачі типу теплопровідності для одного рівняння з узагальненими по похідними;

3. інтегральне подання розв'язку отриманої задачі за допомогою функції Гріна;
4. знаходження змінних Кірхгофа та її похідних, які входять у інтегральні подання;
5. застосування оберненого перетворення Кірхгофа.

Для розв'язання задачі (2.1)-(2.3) застосуємо перетворення Кірхгофа:

$$\theta_i = \frac{1}{\lambda_{0,i}} \int_0^{t_i} \lambda_t^{(i)}(x)\,dx,$$

коефіцієнти теплопровідності: $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{0,i}(1+\beta_i t_i)$

об'ємні теплоємності: $c_V^{(i)}(t_i) = c_{0,i} c_i(t_i)$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_{0,i}\frac{\partial \theta_i}{\partial z}\right] = \frac{c_{0,i}c_i(t_i)}{1+\beta_i t_i}\frac{\partial \theta_i}{\partial \tau} - w_{t,i}(z,\tau) \qquad (2.6)$$

$$\left(\lambda_{0,1}\frac{\partial \theta_1}{\partial z} - P_1(\tau)\right)\Big|_{z=z_0} = 0, \quad \left(\lambda_{0,3}\frac{\partial \theta_3}{\partial z} + P_3(\tau)\right)\Big|_{z=z_3} = 0 \qquad (2.7)$$

$$\theta_i\big|_{\tau=0} = \theta_{0,i}(z), \qquad \theta_{0,i}(z) = t_{0,i}(z) + \frac{\beta_i t_{0,i}^2(z)}{2}, \quad i = 1,2,3$$

$$(\theta_{i+1} - \theta_i)\big|_{z=z_i} = F_{i+1}(\tau), \quad \lambda_{0,\mathrm{i}}\frac{\partial \theta_i(z,\tau)}{\partial z}\Big|_{z=z_i} = \lambda_{0,\mathrm{i+1}}\frac{\partial \theta_{i+1}(z,\tau)}{\partial z}\Big|_{z=z_i}, \qquad (2.8)$$

$$F_{i+1}(\tau) = \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_{i+1}}\right)\left[\theta_{i+1}(z_i,\tau) - \beta_{i+1}^{-1}\left(\sqrt{1+2\beta_{i+1}\theta_{i+1}(z_i,\tau)} - 1\right)\right],$$

$$P_i(\tau)=\varepsilon_i(\theta_i^*(\tau))\sigma[R(\theta_i^*(\tau))-R(t_{c,i}(\tau))]+\alpha_i(\theta_i^*(\tau))[\theta_i^*(\tau)-t_{c,i}(\tau)],$$

$$\theta_i^*(\tau)=\beta_i^{-1}(\sqrt{1+2\beta_i\overline{\theta}_i(\tau)}-1),\qquad i=1,3\qquad\qquad \overline{\theta}_1(\tau)=\theta_1(z_0,\tau),\qquad \overline{\theta}_3(\tau)=\theta_3(z_3,\tau)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_0(z)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]=c_0(z)\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+c_0(z)b(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+\sum_{j=1}^{2}\lambda_{0,j+1}F_{j+1}(\tau)\delta'\left(z-z_j\right)-w_t(z,\tau)\qquad(2.9)$$

$$\theta\big|_{\tau=0}=\theta_0(z),\qquad b(\theta)=\frac{c_1(\theta_1)}{\Lambda_1(\theta_1)}+\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{c_{j+1}(\theta_{j+1})}{\Lambda_{j+1}(\theta_{j+1})}-\frac{c_j(\theta_j)}{\Lambda_j(\theta_j)}\right]S\left(z-z_j\right)-1$$

$S(z)$ – функція Гевісайда, $\delta'(z)$ – похідна від дельта-функції Дірака

$\theta(z,\tau),\theta_0(z),w_t(z,\tau),\lambda_0(z),c_0(z)$ мають вигляд

$$p(z)=p_1(z)+\sum_{k=1}^{2}\left(p_{k+1}(z)-p_k(z)\right)S\left(z-z_k\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_t(z)\frac{\partial G}{\partial z}\right]=c_V(z)\frac{\partial G}{\partial\tau}-\delta(z-\zeta)\delta(\tau)\qquad(-\infty\le z\le\infty)$$

$$G\big|_{z\to\pm\infty}\to 0,\qquad G\big|_{\tau=0}=0.\qquad(2.10)$$

$G(z,\zeta,\tau)$ - функція Гріна лінійної нестаціонарної задачі теплопровідності для трискладового простору

$$G(z,\zeta,\tau)=G_1(z,\zeta,\tau)+\sum_{k=1}^{2}\left(G_{k+1}(z,\zeta,\tau)-G_k(z,\zeta,\tau)\right)S\left(z-z_k\right),$$

$$G_i(z,\zeta,\tau)=G_{i,1}(z,\zeta,\tau)+\sum_{k=1}^{2}\left(G_{i,k+1}(z,\zeta,\tau)-G_{i,k}(z,\zeta,\tau)\right)S\left(\zeta-z_k\right).\qquad(2.11)$$

Інтегральне формулювання задачі на змінну Кірхгофа

для трискладового шару

$$\theta(z,\tau)=-\int_{z_0}^{z_3}\int_0^{\tau}c_0(z)G(z,\zeta,\tau-\tau')b(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\tau'}d\tau'd\zeta+\sum_{j=1}^{2}\lambda_{0,j+1}\times$$
$$\times\int_0^{\tau}\frac{\partial G(z,\zeta,\tau-\tau')}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta=z_j+0}F_{j+1}(\tau')d\tau'-\int_0^{\tau}\{G(z,\zeta,\tau-\tau')P_3(\tau')+\lambda_{0,3}\bar{\theta}_3(\tau')\times$$
$$\times\frac{\partial G(z,\zeta,\tau-\tau')}{\partial\zeta}\bigg\}\bigg|_{\zeta=z_3}d\tau'-\int_0^{\tau}\bigg\{G(z,\zeta,\tau-\tau')P_1(\tau')-\lambda_{0,1}\bar{\theta}_1(\tau')\frac{\partial G(z,\zeta,\tau-\tau')}{\partial\zeta}\bigg\}\bigg|_{\zeta=z_0}d\tau'+ \qquad (2.12)$$
$$+\int_{z_0}^{z_3}\left[c_0(\zeta)G(z,\zeta,\tau)\theta_0(\zeta)+\int_0^{\tau}G(z,\zeta,\tau-\tau')w_t(\zeta,\tau')d\tau'\right]d\zeta.$$

для півбезмежного трискладового стержня

$$\theta(z,\tau)=-\int_{-\infty}^{z_3}\int_0^{\tau}c_0(z)G(z,\zeta,\tau-\tau')b(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\tau'}d\tau'd\zeta+\sum_{j=1}^{2}\lambda_{0,j+1}\times$$
$$\times\int_0^{\tau}\frac{\partial G(z,\zeta,\tau-\tau')}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta=z_j+0}F_{j+1}(\tau')d\tau'-\int_0^{\tau}\{G(z,\zeta,\tau-\tau')P_3(\tau')+\lambda_{0,3}\bar{\theta}_3(\tau')\times \qquad (2.13)$$
$$\times\frac{\partial G(z,\zeta,\tau-\tau')}{\partial\zeta}\bigg\}\bigg|_{\zeta=z_3}d\tau'+\int_{-\infty}^{z_3}\left[c_0(\zeta)G(z,\zeta,\tau)\theta_0(\zeta)+\int_0^{\tau}G(z,\zeta,\tau-\tau')w_t(\zeta,\tau')d\tau'\right]d\zeta.$$

для безмежного трискладового стержня

$$\theta(z,\tau) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\tau} c_0(z) G(z,\zeta,\tau-\tau') b(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial\tau'} d\tau' d\zeta + \\ + \sum_{j=1}^{2} \lambda_{0,j+1} \int_{0}^{\tau} \left. \frac{\partial G(z,\zeta,\tau-\tau')}{\partial\zeta} \right|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' - \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \left[c_0(\zeta) G(z,\zeta,\tau) \theta_0(\zeta) + \int_{0}^{\tau} G(z,\zeta,\tau-\tau') w_t(\zeta,\tau') d\tau' \right] d\zeta. \quad (2.14)$$

Шукане температурне поле знаходимо зі співвідношення:

$$t_i(\theta) = \beta_i^{-1}\left(\sqrt{1+2\beta_i\theta_i(z,\tau)} - 1\right). \quad (2.15)$$

Отримано нові інтегральні подання розв’язків відносно температури або змінної Кірхгофа, в яких на поверхнях поділу відповідно відсутні або лише одна невідома. Для випадку температурнозалежних ФМХ за припущення, що коефіцієнти температуропровідності незначно залежать від температури і їх можна прийняти сталими в межах кожної складової (т.зв. «проста нелінійність») визначення невідомих, які входять у ці подання, з використанням лінійних сплайнів зведено до розв’язання рекурентної системи двох, трьох або чотирьох нелінійних алгебричних рівнянь відносно шуканих значень у вузлах сітки.

Визначення термопружного стану

У тілі ненульовими будуть радіальні та кільцеві напруження:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_0(z,\tau), \qquad \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = \sigma_{r\varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{1-\bar{\nu}(t,z)}{\bar{E}(t,z)}\sigma_0(z,\tau) + \bar{\Phi}(t,z)\right] = 0, \tag{2.16}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_0(z,\tau) = \frac{\bar{E}(z,\tau)}{1-\bar{\nu}(z,\tau)}[C_1(\tau) + zC_2(\tau) - \bar{\Phi}(z,\tau)], \tag{2.17}$$

$C_1(\tau)$ і $C_2(\tau)$ визначені з умов рівності нулю головного вектора і головного моменту радіальних напружень σ_{rr}

$$u = r\left[C_1(\tau) + C_2(\tau)z\right], \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = Q_1^*(z,\tau) + Q_2^*(z,\tau).$$

$$Q_1^*(z,\tau) = -\frac{2\bar{\nu}(t,z)}{1-\bar{\nu}(t,z)}\left[C_1(\tau) + C_2(\tau)z\right], \qquad Q_2^*(z,\tau) = \frac{1+\bar{\nu}(t,z)}{1-\bar{\nu}(t,z)}\bar{\Phi}(t,z) \tag{2.18}$$

$$w = Q(z,\tau) + w_0(\mathrm{r},\tau), \qquad w_0(\mathrm{r},\tau) = -C_2(\tau)r^2/2 + C$$

де $Q(z,\tau)$ – первісна по змінній z від $Q^*(z,\tau) = Q_1^*(z,\tau) + Q_2^*(z,\tau)$

<u>Для півбезмежного трискладового стержня</u>

$$w(z,\tau) = \int_{z_3}^{z} \frac{1+\bar{\nu}(t,\bar{z})}{1-\bar{\nu}(t,\bar{z})}\bar{\Phi}(t,\bar{z})\,d\bar{z}$$

<u>Для безмежного трискладового стержня</u>

$$w(z,\tau) = \int_{h/2}^{z} \frac{1+\bar{\nu}(t,\bar{z})}{1-\bar{\nu}(t,\bar{z})}\bar{\Phi}(t,\bar{z})\,d\bar{z}$$

$$\sigma_0(z,\tau) = -\frac{\bar{E}(t,z)}{1-\bar{\nu}(t,z)}\bar{\Phi}(t,z), \tag{2.19}$$

Методику апробовано на:

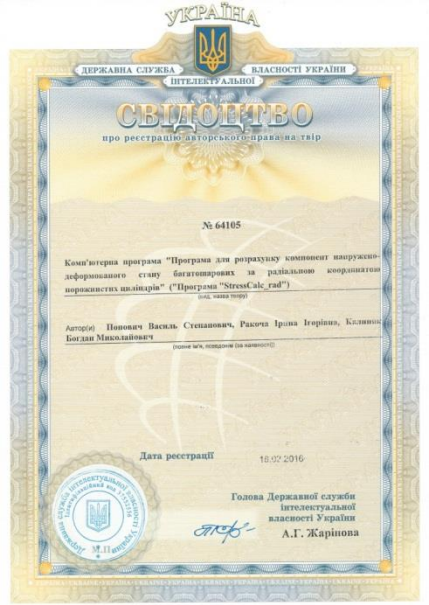
- ***лінійних задачах теплопровідності та відповідних задачах термопружності за сталих ФМХ для*:**
  - *безмежного трискладового стержня під час остигання;*
    - отримано інженерні формули для визначення термопружного стану
  - *безмежного трискладового стержня за дії поверхневого періодичного джерела тепла синусоїдального або косинусоїдального характеру зміни інтенсивності;*
  - *безмежного трискладового стержня за дії імпульсного джерела тепла;*

- ***нелінійних задачах теплопровідності та відповідних задачах термопружності за температурнозалежних ФМХ для*:**
  - *безмежного трискладового стержня за нерівномірного початкового нагріву складових;*
  - *безмежного трискладового стержня за дії рівномірно розподіленого по об'єму проміжкового шару чи зосередженого на одній з поверхонь поділу імпульсного джерела тепла;*
  - *півбезмежного трискладового стержня за конвективно-променевого теплообміну;*
  - *трискладового шару за конвективно-променевого теплообміну;*

Проведено порівняльний аналіз часткових випадків з відомими в літературі.

Проведено аналіз числових досліджень *впливу температурної залежності фізико-механічних характеристик* та *товщин складових* і *параметрів теплообміну* на розподіли нестаціонарних температурних полів, напружень та переміщень.

Свідоцтва про реєстрацію авторських прав на розроблені програми


УКРАЇНА

ДЕРЖАВНА СЛУЖБА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ВЛАСНОСТІ УКРАЇНИ

СВІДОЦТВО

про реєстрацію авторського права на твір

№ 64105

Комп'ютерна програма "Програма для розрахунку компонент напружено-деформованого стану багатошарових за радіальною координатою порожнистих циліндрів" ("Программа "StressCalc_rad")

(код, назва твору)

Автор(и) Попович Василь Степанович, Ракоча Ірина Ігорівна, Калинюк Богдан Миколайович

(прізвище, ім'я, по-батькові (за наявності))

Дата реєстрації 16.02.2016

Голова Державної служби інтелектуальної власності України А.Г. Жарінова

УКРАЇНА

ДЕРЖАВНА СЛУЖБА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ВЛАСНОСТІ УКРАЇНИ

СВІДОЦТВО

про реєстрацію авторського права на твір

№ 64106

Комп'ютерна програма "Програма для розрахунку температурних напружень багатошарових по осі циліндрів" ("Программа "StressCalc_axes")

(код, назва твору)

Автор(и) Попович Василь Степанович, Ракоча Ірина Ігорівна

(прізвище, ім'я, по-батькові (за наявності))

Дата реєстрації 16.02.2016

Голова Державної служби інтелектуальної власності України А.Г. Жарінова

Цикл наукових праць складається з **33 публікацій**, серед яких: **13 статтей** у фахових виданнях, з них 3 – в журналах, які реферуються наукометричною базою Scopus, **2 авторські права на твір**, **18 матеріалів і тез доповідей** на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях. Згідно бази даних Google Scholar кількість посилань на роботи авторів ***15, а їх індекс Гірша дорівнює 3***.

- ***Дякуємо за Вашу увагу!***