Аналітичні методи теорії функцій та їх застосування

Цикл робіт на здобуття державної премії України в галузі науки і техніки 2020 року

висунутий Фізико-технічним інститутом низьких температур імені Б.І. Вєркіна НАН України

- Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Вєркіна НАН України
- Інститут математики НАН України
- Інститут прикладної математики і механіки НАН України

Авторський колектив

ГОЛІНСЬКИЙ Леонід Борисович – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу теорії функцій Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України

ГУТЛЯНСЬКИЙ Володимир Якович – член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, радник при дирекції Інституту прикладної математики і механіки НАН України

ЄГОРОВА Ірина Євгенівна – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу математичної фізики Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України

КОТЛЯРОВ Володимир Петрович – доктор фізико-математичних наук, професор, головний науковий співробітник відділу математичної фізики Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України

РОМАНЮК Анатолій Сергійович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу теорії функцій Інституту математики НАН України

СКРИПНІК Ігор Ігорович – член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, доцент, директор Інституту прикладної математики і механіки НАН України

ШЕПЕЛЬСЬКИЙ Дмитро Георгійович – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу математичної фізики Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України

Кількість публікацій за роботою: 139, у т.ч.

- 6 монографій (3 видані за кордоном, у видавництвах Springer, Walter de Gruyter, European Mathematical Society)
- 133 статті (106 – у закордонних журналах з високим імпакт-фактором)

Загальна кількість посилань на публікації авторів/ h-індекс роботи
(у порівнянні з 03.2020):

- Web of Science – 1988(1850)/24(22)
- Scopus – 2224(2054)/25(24)
- Google Scholar – 4080/33

За даною тематикою захищено:

- 12 докторських і 43 кандидатських дисертацій
- 1 габілітація (університет Париж-7)
- 2 дисертації PhD (Віденський університет і університет Париж-7)

Наукометричні показники виконавців

		Реферов. праць (MathSciNet)	Scopus		WoS		Google Scholar	
			цитувань	h-індекс	цитувань	h-індекс	цитувань	h-індекс
1	Голінський Л.Б.	79	420 (388)	10	407 (388)	10	942 (912)	15
2	Гутлянський В.Я.	116	328 (296)	11	166 (161)	8 (7)	1322 (1218)	19 (18)
3	Єгорова І.Є.	45	268 (250)	12 (10)	299 (277)	12 (11)	608 (586)	16
4	Котляров В.П.	57	430 (393)	12	458 (412)	14	1075 (1047)	20
5	Романюк А.С.	55	260 (208)	10 (9)	88 (85)	6	624 (612)	14
6	Скрипник І.І.	69	244 (228)	8	191 (181)	8	451 (419)	12 (11)
7	Шепельський Д.Г.	50	692 (615)	15 (14)	719 (645)	17 (15)	1162 (1068)	20 (19)
	Разом		2642 (2378)	11.1 (с) (10.5)	2328 (2149)	10.7 (с) (10.1)	6184 (5862)	16.6 (с) (16.1)

(у порівнянні з 03.2020)

Кількість різних журналів з імпакт-фактором, у яких публікувались роботи: 59

	Журнал	Імпакт-фактор	Кількість публікацій
1	Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation	3,967	1
2	Communications on Pure and Applied Analysis	3,386	1
3	Communications in Partial Differential Equations	2,987	1
4	Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences	2,749	1
5	Communications in Mathematical Physics	2,498	4
6	Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	2,110	5
7	Journal of Differential Equations	2,222	2
8	Journal of the London Mathematical Society, Second Series	2,067	1
9	Nonlinearity	1,767	4
10	SIAM Journal on Mathematical Analysis	1,680	2
11	Advanced Nonlinear Studies	1,650	2
12	Journal of Functional Analysis	1.637	1
13	Inverse Problems	1,620	10
14	Physica D: Nonlinear Phenomena	1,514	1
15	Journal Phys. Soc. Japan	1,485	1

...

Дані про цитування (початок таблиці)

	Назва статті (монографії), автори, назва видання, рік, том, сторінка	WoS	Scopus	Google
1	Long-time asymptotics for the Camassa-Holm equation, Boutet de Monvel, A., Kostenko, A., Shepelsky, D., Teschl, G. SIAM Journal on Mathematical Analysis (2009), 41 (4), 1559-1588.	86	82	109
2	On conformal dilatation in space, C.J. Bishop, V.Y. Gutlyanskiĭ, O. Martio, M. Vuorinen International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences (2003), 22, 1397-1420	-	64	174
3	The MKdV equation on the half-line, Boutet de Monvel, A., Fokas, A.S., Shepelsky, D., Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu (2004), 3 (2), 139-164.	63	61	81
4	Analysis of the global relation for the nonlinear Schrödinger equation on the half-line, Boutet de Monvel, A., Fokas, A.S., Shepelsky, D., Letters in Mathematical Physics (2003), 65 (3), 199-212.	57	61	87
5	Szego difference equations, transfer matrices and orthogonal polynomials on the unit circle, Golinskii, L., Nevai, P. Communications in Mathematical Physics (2001), 223 (2), 223-259	50	45	70
6	Integrable nonlinear evolution equations on a finite interval, Boutet de Monvel, A., Fokas, A.S., Shepelsky, D., Communications in Mathematical Physics (2006), 263 (1), 133-172.	42	46	67
7	Quadrature formula and zeros of para-orthogonal polynomials on the unit circle, Golinskii, L. Acta Mathematica Hungarica (2002), 96 (3), 169-186.	43	45	66
8	On equations gauge equivalent to the sine-Gordon and Pohlmeyer-Lund-Regge equations, Kotlyarov V.P., Journal of the Physical Society of Japan (1994), 63 (10), 3535-3537	44	43	53
9	Riemann-Hilbert approach for the Camassa-Holm equation on the line, Boutet de Monvel, A., Shepelsky, D., Comptes Rendus Mathematique (2006), 343 (10), 627-632.	43	41	53
10	Perturbation of Orthogonal Polynomials on an Arc of the Unit Circle, Golinskii, L., Nevai, P., Van Assche, W. Journal of Approximation Theory (1995), 83 (3), 392-422.	38	43	67
11	The asymptotic properties of the spectrum of nonsymmetrically perturbed Jacobi matrix sequences, Golinskii, L., Serra-Capizzano, S. Journal of Approximation Theory (2007), 144 (1), 84-102.	39	40	74
12	Long-time asymptotics for the focusing NLS equation with time-periodic boundary condition on the half-line, Boutet de Monvel, A., Its A.R., Kotlyarov V.P., Communications in Mathematical Physics (2009), 290 (2), 479-522,	37	37	48
13	A Blaschke-type condition and its application to complex Jacobi matrices, Borichev, A., Golinskii, L., Kupin, S. Bulletin of the London Mathematical Society (2009), 41 (1), 117-123.	36	35	74
14	On the degenerate Beltrami equation, V Gutlyanskiĭ, O Martio, T Sugawa, M Vuorinen Transactions of the American Mathematical Society (2005), 357 (3), 875-900	32	36	85
	……			

Об’єднуюча ідея досліджень, що увійшли до роботи: розбудова та вдосконалення таких методів та підходів теорії функцій, які мають ефективні застосування до широкого спектру проблем математики, зокрема:

- математичної фізики
- теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними

На цьому шляху були досліджено ряд актуальних задач:

- теорії інтегровних нелінійних диференціальних та різницевих рівнянь
- теорії конформних, квазіконформних та квазірегулярних відображень
- теорії нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь
- комплексного аналізу несамоспряжених операторів
- спектральної теорії матричних різницевих рівнянь
- лінійної та нелінійної апроксимації періодичних функцій багатьох змінних

Методи, які було розвинуто та узагальнено (I):

- метод скінченнозонного інтегрування нелінійних рівнянь
- методи оберненої задачі розсіяння у формі рівнянь Марченка і задачі Рімана-Гільберта для задач Коші з початковими даними типу «сходинки» для інтегровних нелінійних диференціальних та різницевих рівнянь
- методи задачі Рімана-Гільберта для початково-крайових задач для інтегровних нелінійних рівнянь
- асимптотичні методи для початкових та початково-крайових задач для інтегровних нелінійних рівнянь на основі асимптотичного аналізу рівнянь Марченка та задач Рімана-Гільберта
- методи комплексного аналізу, геометричної теорії конформних і квазіконформних відображень та їх застосування до теорії диференціальних рівнянь

Методи, які було розвинуто та узагальнено (II):

- методи дослідження внутрішніх та граничних властивостей розв’язків нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь
- методи комплексного аналізу в теорії несамоспряжених операторів
- методи лінійної та нелінійної апроксимації класів періодичних функцій багатьох змінних
- теорію ортогональних поліномів і матриць Якобі, теорію унітарних CMV матриць та матричних моделей
- методи теорії аналітичних функцій та теорії потенціалу із застосуваннями до теорії збурень лінійних операторів

Аналітичні та асимптотичні методи дослідження нелінійних інтегровних рівнянь (I)

- започатковано алгебро-геометричне (скінченнозонне) інтегрування нелінійних рівнянь Шредінгера і Гайзенберга та рівняння синус-Гордона
- доведена калібрована еквівалентність нелінійних рівнянь Шредінгера і Ландау-Ліфшиця, рівняння синус-Гордона і рівняння Полмейєра-Лунда-Редже, нелінійних рівнянь Максвела-Блоха і рівнянь стимульованого раманівського розсіювання
- досліджена асимптотичної поведінки нелокалізованих розв’язків інтегровних рівнянь у околі переднього фронту, зокрема, розв’язків типу сходинки, які якісно моделюють ударні хвилі різноманітної природи
- відкрито новий вид зігнутих асимптотичних солітонів для рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі, які моделюють хвилі на воді при руйнуванні дамби
- узагальнення аналітичної теорії матричних задач Рімана–Гільберта, яке дозволило виявити та строго обґрунтувати нові асимптотичні режими (у площині простір-час) для модифікованого рівняння Кортевега - де Фріза, нелінійного рівняння Шредінгера, моделі стимульованого раманівського розсіювання, для яких розглядаються як початкові, так і початково-крайові задачі
- доведена інтегровність (лінеарізованість) змішаної задачі для нелінійних рівнянь Максвела-Блоха за наявності неоднорідного уширення частот переходу дворівневих атомів

Аналітичні та асимптотичні методи дослідження нелінійних інтегровних рівнянь (II)

- запропоновано метод побудови унімодулярних матричних функцій Бейкера-Ахієзера на комплексній площині з розтинами для нелінійного рівняння Шредінгера і нелінійних рівнянь Максвела-Блоха із довільним неоднорідним уширенням; побудовані нові явні формули для відповідних скінченнозонних розв'язків
- побудовано теорію розсіювання для одновимірного оператора Шредінгера на осі з асимптотично скінченнозонним потенціалом типу сходинки
- розв'язано задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза (КдФ) і модифікованого рівняння КдФ із асимптотично скінченнозонними початковими умовами типу сходинки, що мають задану гладкість і число скінченних моментів збурення
- розв'язано пряму й обернену задачі розсіювання для оператора Якобі на осі з коефіцієнтами, що є асимптотично близькими до коефіцієнтів різних скінченнозонних операторів на різних півосях;
- проінтегровано рівняння ієрархії Тоди в класі асимптотично скінченнозонних початкових умов типу сходинки
- методом оберненої задачі розсіювання отримано асимптотичні солітони для ланцюжка Тоди поблизу переднього хвильового фронту
- розвинуто метод векторних задач Рімана-Гільберта для опису та обґрунтування асимптотичної поведінки хвиль стиску та розрідження для рівнянь Кортевега-де Фріза та ланцюжка Тоди за великим часом

Аналітичні та асимптотичні методи дослідження нелінійних інтегровних рівнянь (III)

- розвинуто метод аналізу обернених задач для систем диференціальних рівнянь, що виникають при моделюванні розповсюдження хвиль у анізотропних та бі-ізотропних середовищах
- запропоновано метод оберненої задачі у формі задачі Рімана-Гільберта для інтегрування нелінійного рівняння Камаси-Хольма та інших піконних моделей розповсюдження хвиль на мілкій воді
- розвинуто метод задачі Рімана-Гільберта для інтегрування нелінійних рівнянь, що є короткохвильовими границями рівнянь типу Камаси-Хольма, зокрема, рівняння короткого імпульсу
- отримано детальний опис асимптотичної (за великим часом) поведінки розв’язків початкових задач для піконних рівнянь
- досліджено вплив крайових умов на асимптотику розв’язків початково-крайових задач для піконних рівнянь та отримано детальний опис асимптотичної поведінки розв’язків таких задач
- отримано характеризацію однофазної поведінки крайових значень Неймана для початково-крайової задачі для нелінійного рівняння Шредінгера у випадку періодичної однофазної поведінки крайової умови Діріхле

Методи комплексного аналізу в спектральній теорії несамоспряжених матриць Якобі і в теорії ортогональних поліномів на одиничному колі

- вперше застосовано ідеї спектральної теорії в контексті теорії ортогональних поліномів на одиничному колі. Запропоновано аналог розв’язку Вейля та розвинута теорія підпорядкованості
- виявлено роль мір Олександрова в теорії Сегьо та знайдено природний варіант спектрального усереднення, одержано нові результати стосовно поліноміального класу Сегьо та доведено спеціальний випадок гіпотези Саймона про узагальнені теореми Сегьо
- досліджено нові класи мір на одиничному колі в термінах асоційованих з ними параметрами Верблунського
- побудовано теорію розподілу нулів пара-ортогональних поліномів на одиничному колі та вивчено властивості точок носія міри ортогональності притягувати ці нулі
- методами теорії ортогональних поліномів на одиничному колі розв’язано задачу Коші для системи диференціально-різницевих рівнянь, відому як потік Шура, та досліджено асимптотичну поведінку її розв’язків
- побудовано теорію аналітичних (субгармонійних) функцій нерадіального зростання в одиничному крузі та досліджено розподіл нульових множин (мір Ріса); результати застосовано в теорії несамоспряжених збурень лінійних операторів
- отримано нові нерівності Лієба-Тірінга, які характеризують швидкість збігання дискретного спектру до спільного суттєвого спектру для несамоспряжених операторів Якобі та скінченозонних операторів

Методи геометричної теорії конформних і квазіконформних відображень у теорії диференціальних рівнянь (I)

- розвинуто метод Льовнера-Куфарєва у теорії однолистих функцій та наведено інтегро-диференціальні параметричні зображення основних класів конформних відображень круга і кругового кільця, що дозволило розробити ефективний метод дослідження екстремальних проблем для однолистих функцій
- розв’язано загальну проблему викривлення і обертання при конформних відображеннях одиничного круга
- розроблено варіаційний метод для квазіконформних відображень площини, які є розв’язками квазілінійного рівняння Бельтрамі з обмеженнями на комплексну характеристику загального вигляду
- для квазіконформних гомеоморфізмів площини, конформних в одиночному крузі, вперше дано точний розв’язок задачі про радіус зоряності та встановлені точні двосторонні оцінки модуля відображуючої функції

Методи геометричної теорії конформних і квазіконформних відображень у теорії диференціальних рівнянь (II)

- створено новий метод дослідження локальної поведінки квазіконформних і більш загальних відображень на площині та у просторі, без умови диференційованості, на основі введеного поняття інфінітезимального простору
- для квазіконформних відображень на площині доведено, що апроксимативна неперервність комплексної характеристики у заданій точці притягує типові геометричні якості конформності для самого відображення в околі цієї точки
- знайдено еквівалентні умови в термінах квазіконформних відображень і їх комплексних характеристик, що забезпечують асимптотичну конформність квазіконформних кривих; встановлено ефективні достатні умови спрямлюваності та гладкості таких кривих
- для квазісиметричних відображень дійсної осі, досліджено симетрії Гардінера-Саллівана і доведено критерії того, що квазісиметричний автоморфізм є асимптотично симетричним або асимптотично конформним у значенні Карлесона
- для лінійних еліптичних систем на площині, доведено теореми зображення через квазіконформні гомеоморфізми розв’язків з логарифмічними особливостями і досліджена проблема регулярності

Внутрішні та граничні властивості розв’язків нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь (I)

- розроблені нові методи дослідження крайових задач для напівлінійних рівнянь дивергентного виду, що виникають у математичних моделях теорії горіння, процесів дифузії і абсорбції при хімічних реакціях в анізотропних та неоднорідних середовищах;
- в плані розвитку методів доведення регулярності розв'язків нелінійних еліптичних і параболічних рівнянь, розвинуто методи отримання апріорних оцінок зверху і знизу, що дають можливість оцінити розв’язок рівняння через функцію точки або функцію множини;
- застосовано метод Кілпелайнена та Мали та доведено неперервність та нерівність Харнака для побудови якісної теорії нелінійних параболічних рівнянь з сингулярними молодшими членами;
- доведено точну умову неперервності слабкого розв’язку еволюційного рівняння p-Лапласа біля негладкої границі області в термінах розбіжності інтегралу Вінера

Внутрішні та граничні властивості розв’язків нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь (II)

- отримано точні аналоги формули Пуассона для еволюційного рівняння p-Лапласа та рівняння пористого середовища в термінах параболічних потенціалів Вольфа та Ріса
- отримано точні поточкові оцінки сингулярних розв’язків для різноманітних нелінійних еліптичних і параболічних рівнянь з нестандартними умовами росту
- отримано точні умови, які забезпечують Гельдерову неперервність розв’язків анізотропного еліптичного рівняння
- для анізотропних еліптичних і параболічних рівнянь з сингулярною абсорбцією та градієнтною абсорбцією, доведено оцінки Келлера-Оссермана в термінах потенціалу Вольфа від абсорбційного члена, що дозволило побудувати якісну теорію таких рівнянь

Методи лінійної та нелінійної апроксимації класів періодичних функцій багатьох змінних

- розвинуто теорію лінійного та нелінійного наближення класів Нікольського-Бєсова періодичних функцій багатьох змінних, що визначаються обмеженнями на їх гладкісні характеристики – модулі неперервності та мішані похідні
- встановлено точні за порядком оцінки найкращих наближень періодичних функцій багатьох змінних, що належать до класів Нікольського-Бєсова, за допомогою тригонометричних поліномів зі спектрами у так званих східчасто-гіперболічних хрестах
- знайдено точні за порядком оцінки низки поперечників (колмогоровського, лінійного, тригонометричного та ортопоперечника) цих класів у просторах Лебега, що дозволило обґрунтувати доцільність використання для наближення функцій з класів Нікольського-Бєсова саме тригонометричних поліномів, що мають вказану структуру
- запропоновано нові і модифіковано відомі методи дослідження апроксимативних характеристик найкращого тригонометричного і найкращого білінійного наближень функціональних класів Соболєва і Нікольського-Бєсова та з’ясовано переваги нелінійних методів наближення порівняно з класичними лінійними, а також виявлено низку ефектів, що виникають внаслідок особливостей багатовимірного випадку

Нелінійні інтегровні рівняння (РЧП, диференціально-різницеві): метод оберненої задачі розсіяння

Початкові (початково-крайові) дані $q_0(x), g_0(t), g_1(t)$

Пара Лакса

Пряма задача розсіяння

Спектральні функції
$q_0(x) \to s(k)$
$g_0(t), g_1(t) \to S(k)$

Матриця стрибка
$\{s(k), S(k)\} \to J(x,t,k)$

Задача Рімана-Гільберта

$$M_+(x,t,k) = M_-(x,t,k)J(x,t,k), k \in \Sigma$$

$$M_+(x,t,k) \to I, k \to \infty$$

Отримання $q\,(x,t)$ в термінах $M\,(x,t,k)$:

$$q\,(x,t) = 2\mathrm{i} \lim_{k\to\infty} M_{12}(x,t,k)$$

Нелінійний метод найшвидшого спуску

Асимптотика $M(x,t,k)$ за великим часом: $t \to \infty$

Нелінійна еволюція
$q_t = F(q, q_x, q_{xx}, \dots)$

Розв'язок нелінійного рівняння $q\,(x,t)$

Обернена задача розсіяння

Асимптотика $q\,(x,t)$ за великим часом: $t \to \infty$

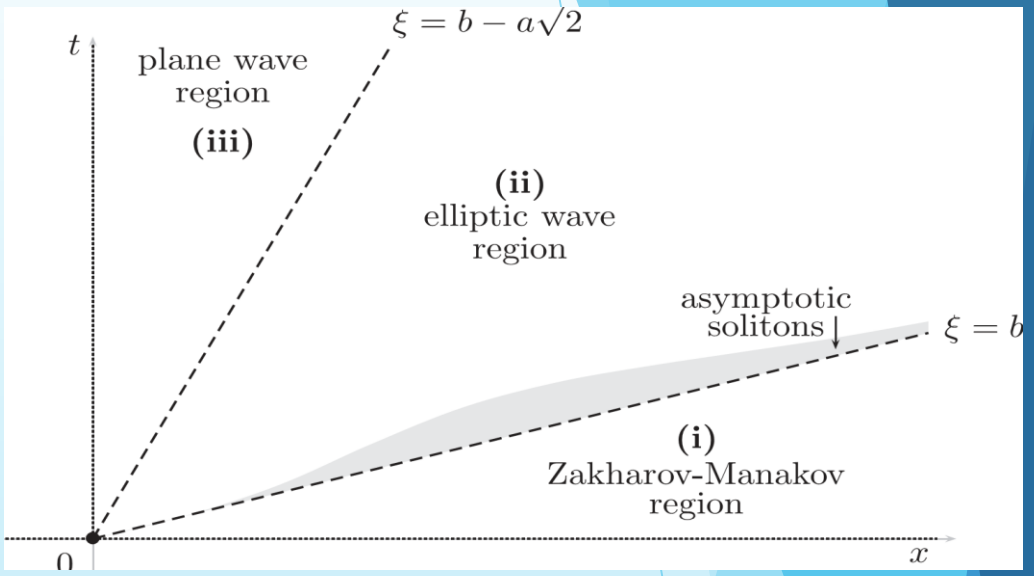
Асимптотика нелінійних коливань, збуджених гармонічною крайовою умовою

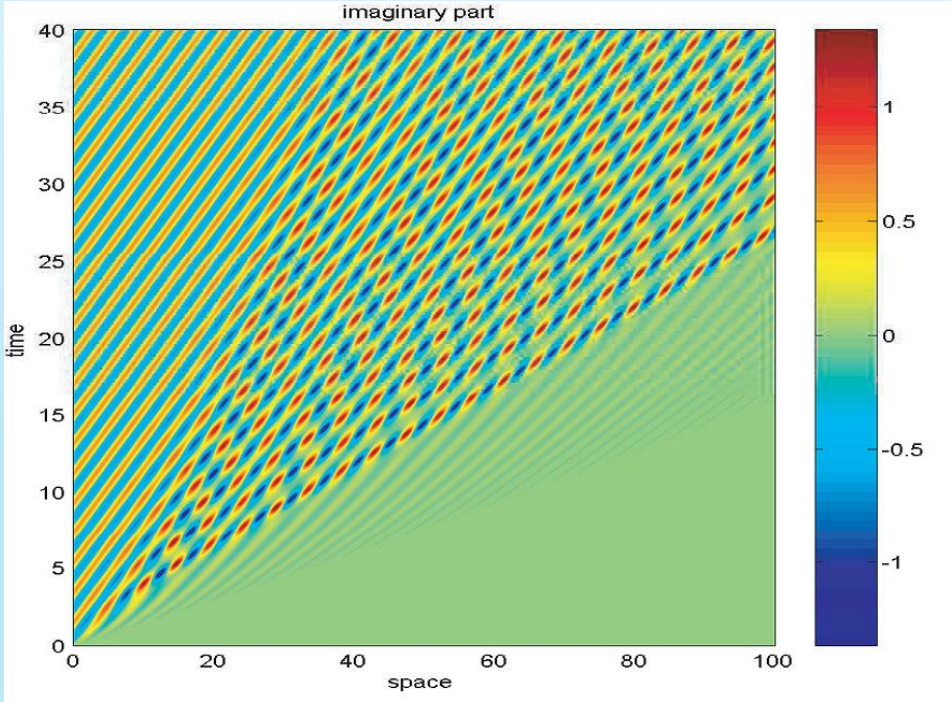
Модель: нелінійне рівняння Шредінгера

- $iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = 0, x > 0$
- $q(x,0) = q_0(x) \to 0, x \to +\infty$
- $q(0,t) = \alpha e^{2i\omega t}$

Задача: поведінка $q(x,t)$, коли $t \to \infty$

Результат: ***3 зони*** з якісно різною поведінкою





числовий розрахунок

- $\xi = \frac{x}{4t} > \beta$:

$$q(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\rho(-\xi)e^{4i\xi^2 t + 2i\rho^2(-\xi)\log t + i\phi(-\xi)} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

- $\beta - \alpha\sqrt{2} < \xi < \beta$:

$$q(x,t) \simeq [\alpha + \Im d(\xi)]\frac{\theta_3[B_g t/2\pi + B_\omega \Delta/2\pi + U_-]}{\theta_3[B_g t/2\pi + B_\omega \Delta/2\pi + U_+]}\frac{\theta_3[U_+]}{\theta_3[U_-]}e^{2ig_\infty(\xi)t - 2i\phi(\xi)}$$

- $0 < \xi < \beta - \alpha\sqrt{2}$:

$$q(x,t) = \alpha e^{2i[\beta x + \omega t - \phi(\xi)]} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

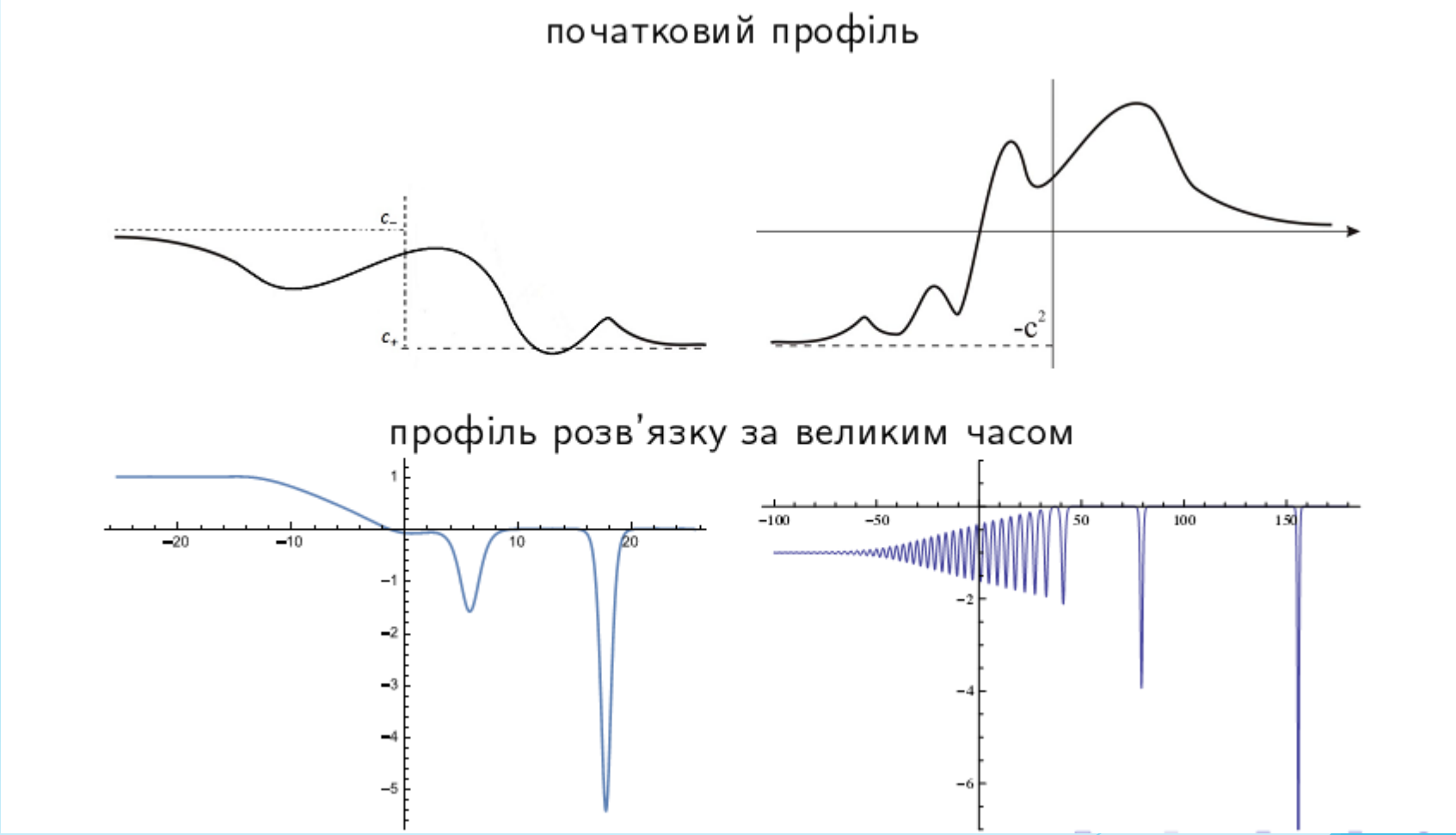
теоретичний опис

Асимптотична поведінка розв'язків РЧП з початковими умовами типу сходинки

Рівняння Кортевега-де Фріза $q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0$: 2 типи сходинок

Хвиля розрідження

Хвиля стиску



Асимптотична поведінка різницевих систем з початковими умовами типу сходинки

Ланцюжок Тоди:

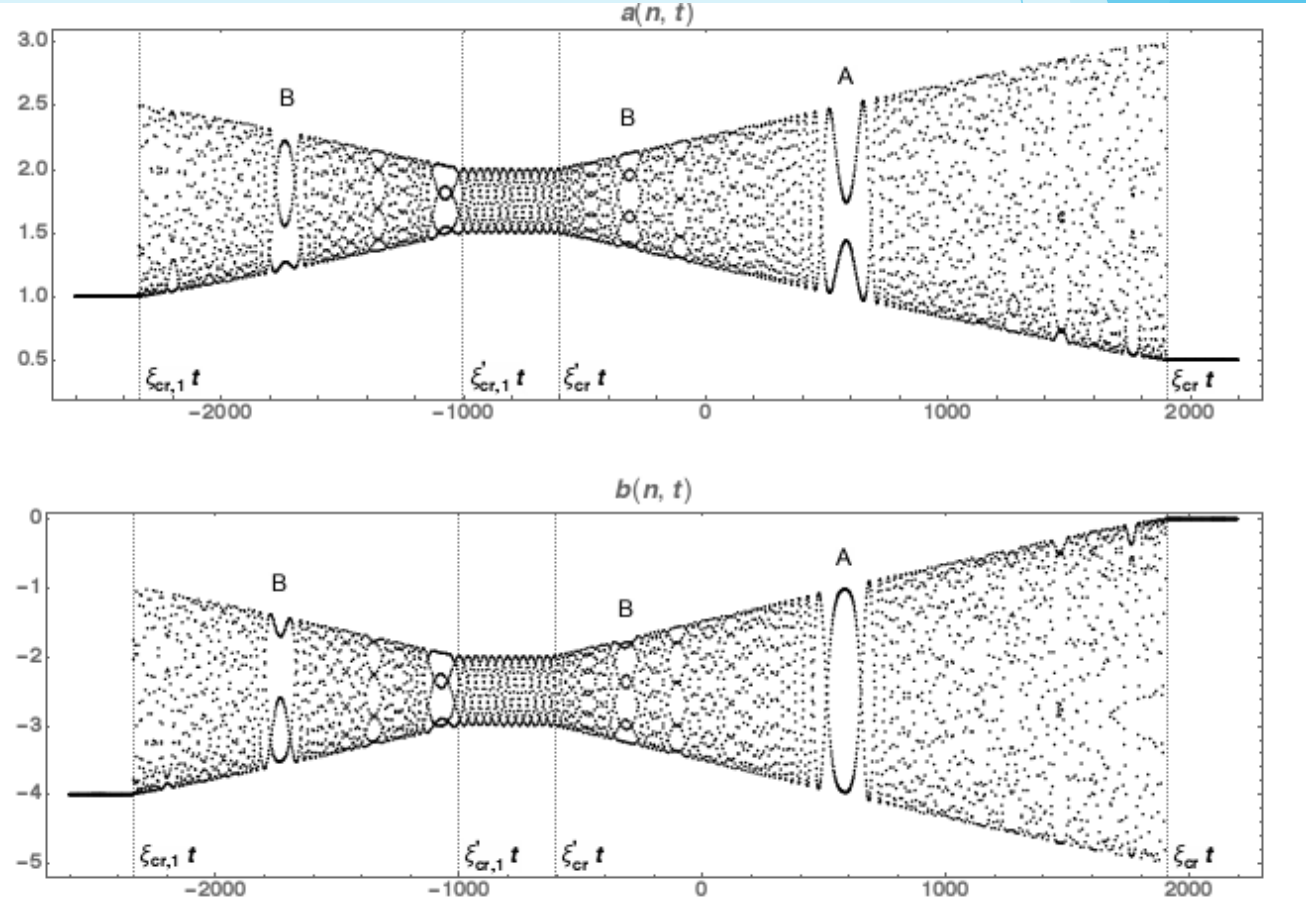
$$\begin{aligned} \dot{b}(n,t) &= 2(a^2(n,t) - a^2(n-1,t)), \\ \dot{a}(n,t) &= a(n,t)(b(n+1,t) - b(n,t)), \end{aligned} \qquad (n,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+$$

Хвиля стиску: $b + 2a < -1$

Початкові умови:

$$a(n,0) \to \frac{1}{2}, b(n,0) \to 0 \text{ коли } n \to +\infty$$

$$a(n,0) \to a, b(n,0) \to b \text{ коли } n \to -\infty$$



Матричні функції Бейкера-Ахієзера, асоційовані з нелінійними інтегровними рівняннями

Рівняння Максвела-Блоха

$$\mathcal{E}_t + \mathcal{E}_x = 2\Omega \int_{-\infty}^{\infty} n(\lambda)\rho(t,x,\lambda)\mathrm{d}\lambda,$$

$$\rho_t + 2\mathrm{i}\lambda\rho = 2\mathcal{N}\mathcal{E},$$

$$\mathcal{N}_t = -\left(\mathcal{E}^*\rho + \mathcal{E}\rho^*\right).$$

$\mathcal{E} = \mathcal{E}(t,x)$ - огинаюча електричного поля, $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t,x,\lambda)$ і $\rho = \rho(t,x,\lambda)$ - елементи матриці щільності квантовоі атомноі підсистеми, λ - відхилення від середньоі частоти Ω.

Матрична форма рівнянь Максвела-Блоха

$$H_t(t,x) + H_x(t,x) - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} [\sigma_3, F(t,x,s)]n(s)ds = 0$$

$$F_t(t,x,\lambda) + [\mathrm{i}\lambda\sigma_3 + H(t,x), F(t,x,\lambda)] = 0.$$

Пара Лакса – АКНС система

$$\Psi_t + \mathrm{i}z\sigma_3\Psi = -H(t,x)\Psi,$$

$$\Psi_x - \mathrm{i}z\sigma_3\Psi + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t,x,s)n(s)}{s-z}ds\Psi = H(t,x)\Psi,$$

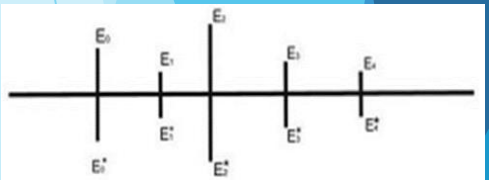
Ідея: функція Бейкера-Ахієзера як розв'язок задачі Рімана-Гільберта

Визначення функції Бейкера-Ахіəзера

- $\Psi(t,x,z)$ – аналітична поза контуром Σ;
- $\Psi_-(t,x,z) = \Psi_+(t,x,z)J(x,z), \qquad z \in \Sigma,$

$$J(x,z) = \begin{cases} e^{-\frac{\pi x n(\lambda)}{2}\sigma_3}, & z = \lambda \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\phi_j} \\ \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\phi_j} & 0 \end{pmatrix}, & z \in (E_j, E_j^*); \end{cases}$$

- $\Psi(t,x,z) = \sigma_2\Psi^*(t,x,z^*)\sigma_2;$
- $\Psi(t,x,z) = \left(I + O(z^{-1})\right)e^{-\mathrm{i}z(t-x)\sigma_3}, z \to \infty.$



Результат:

Електричне поле в тета-функціях

$$\mathcal{E}(t,x) = E_\Theta \frac{\Theta(\mathbf{C}(t,x) + \mathbf{D})}{\Theta(\mathbf{C}(t,x) - \mathbf{D})} e^{2\mathrm{i}(tf_0 + xg_0) - \mathrm{i}\phi_0}, \mathbf{C}(t,x) := \mathbf{C}^f t + \mathbf{C}^g x + \mathbf{C}^\phi$$

Нелінійне перетворення Фур'є (НПФ) як елемент систем оптичної комунікації

Замість цього…

Нелінійне рівняння Шредінгера

$$i\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}+|q|^2 q=0$$

$q(t,z=0)$ → $q(t,z=L)$

Оптичний сигнал

нелінійне розповсюдження

Пряме нелінійне перетворення Фур'є

Обернене нелінійне перетворення Фур'є

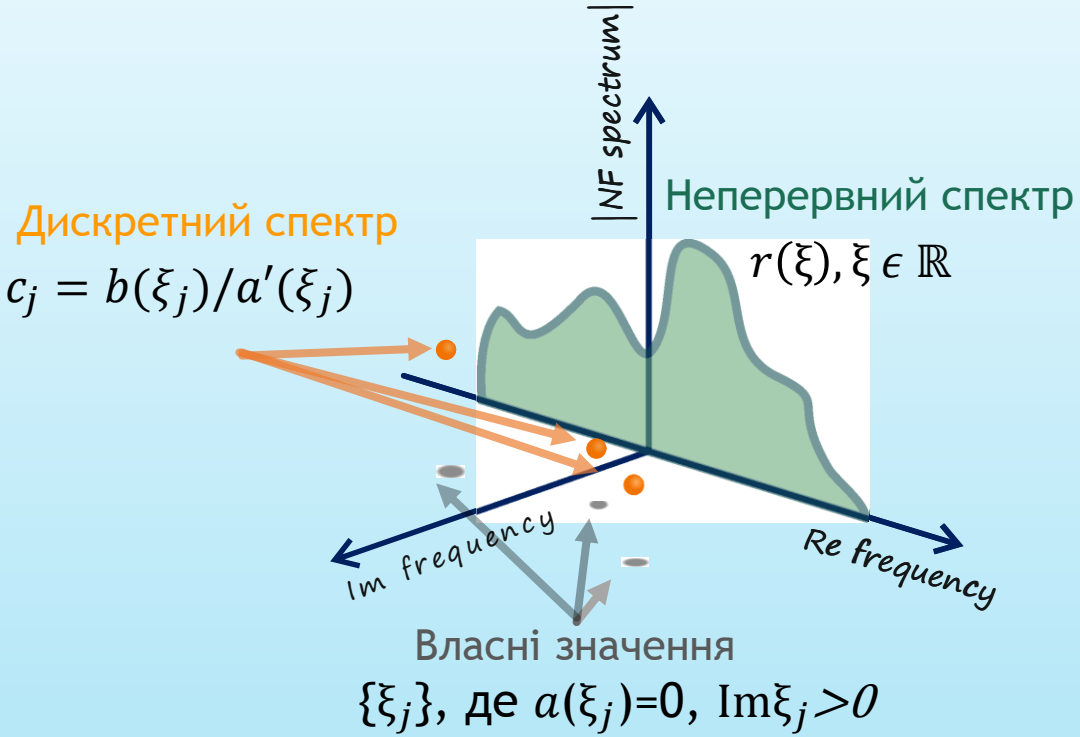
… робимо так:

$\Sigma(\xi,z=0)$ → $\Sigma(\xi,z=L)$

Нелінійні моди

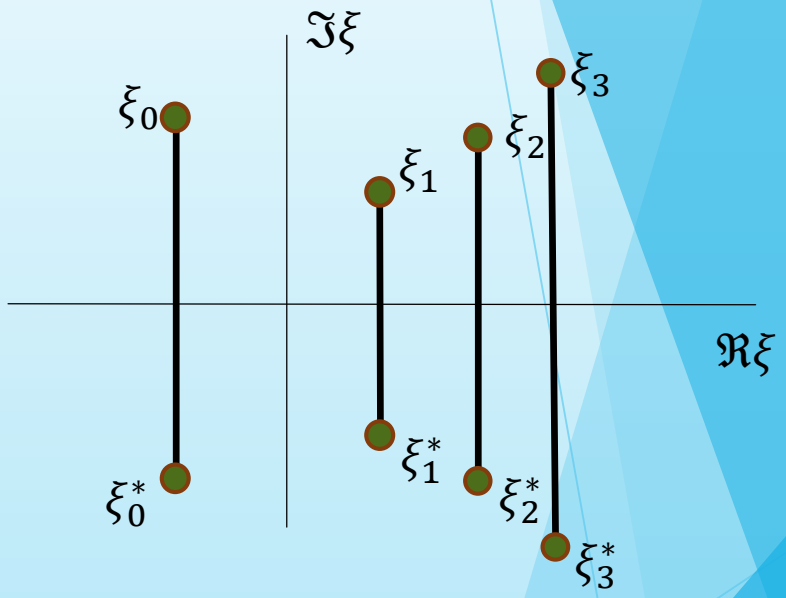
лінійне розповсюдження

НПФ з нульовими крайовими умовами



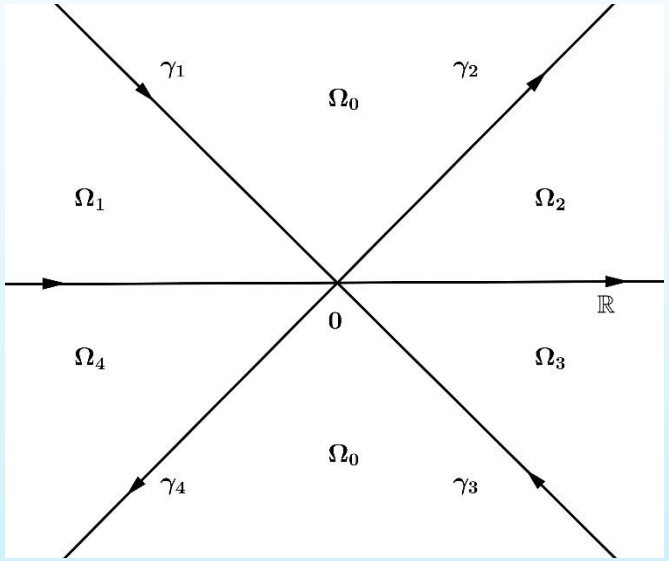
$$r(z=L) = r(z=0)e^{2i\xi^2 L}$$
$$c_j(z=L) = c_j(z=0)e^{2i\xi_j{}^2 L}$$

Скінченнозонне НПФ



Обернена задача як задача Рімана-Гільберта:

$$\mathbf{M}^-(t,z,\lambda) = \mathbf{M}^+(t,z,\lambda)\,\mathbf{G}_j(t,z), \quad \text{for } \lambda \in \Gamma_j,$$
$$\mathbf{M}(t,z,\lambda \to \infty) \to \mathbf{I}.$$



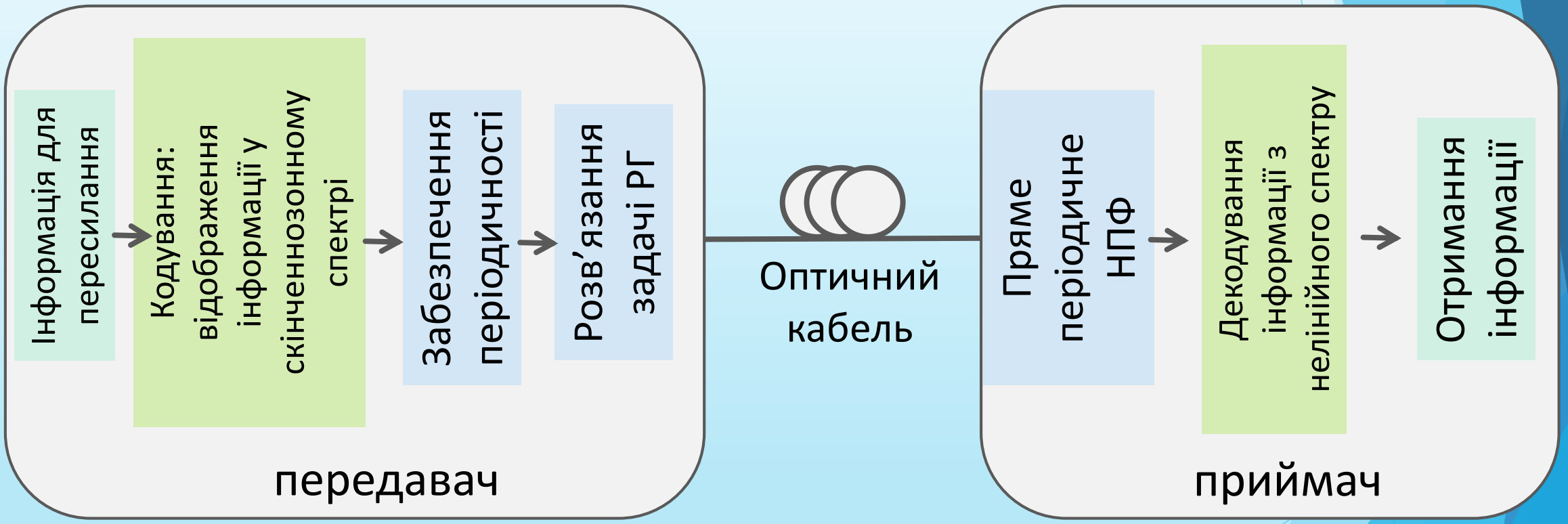
Riemann

Hilbert

Задача Рімана-Гільберта (матрична):
за даними Γ та $G(k)$, $k\in\Gamma$, знайти $M(k)$:

- аналітична в $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, $\Gamma = \cup\, \gamma_j$
- $M_+(k) = M_-(k)G(k)$, $k\in\Gamma$
- $M(\infty) = I$

Ідея: кодування у системі оптичної трансмісії на базі задачі Рімана-Гільберта

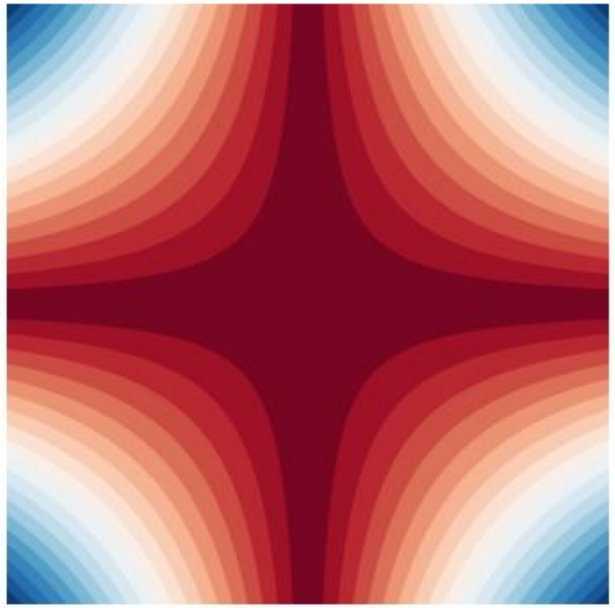

Інформація для пересилання
Кодування: відображення інформації у скінченнозонному спектрі
Забезпечення періодичності
Розв'язання задачі РГ
передавач
Оптичний кабель
Пряме періодичне НПФ
Декодування інформації з нелінійного спектру
Отримання інформації
приймач

Лінійна та нелінійна апроксимація класів періодичних функцій багатьох змінних

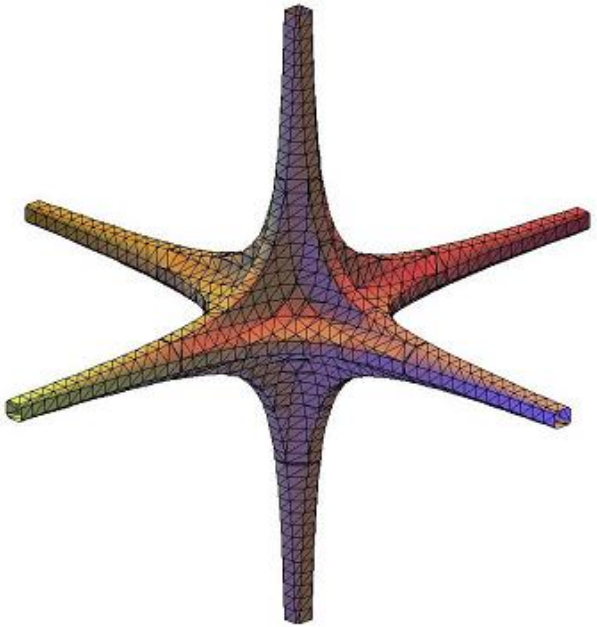
Оцінки найкращих наближень періодичних функцій багатьох змінних, що належать до класів Нікольського-Бєсова, за допомогою тригонометричних поліномів зі спектром у східчасто-гіперболічних хрестах

Гіперболічний хрест

$$\Gamma(N) = \left\{ \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : \quad \prod_{j=1}^{d} \max\{|k_j|, 1\} \leq N \right\}$$



d=2



d=3

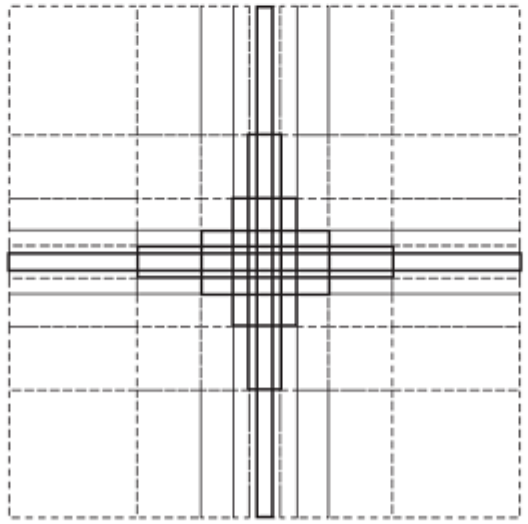
Східчастий гіперболічний хрест

Для $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ покладемо

$$Q_n = \bigcup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) \le n} \rho(\boldsymbol{s}), \qquad \text{де} \quad (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) = s_1 + \cdots + s_d,$$

$$\rho(\boldsymbol{s}) = \left\{ \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : \quad 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = 1, \ldots, d \right\}$$

$$|Q_n| \asymp \Gamma\left(2^n\right) \asymp 2^n n^{d-1}$$



$d = 2$

Апроксимаційні характеристики

Для нормованого простору X і $F \subset X$

$$E_{Q_n}(F)_X := \sup_{f \in F} \inf_{t \in T(Q_n)} \|f - t\|_X$$

— **величина найкращого наближення класу F у просторі X за допомогою тригонометричних поліномів** з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів

$$e_M(F)_X := \sup_{f \in F} \inf_{\boldsymbol{k}^j, c_j} \left\| f - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i\left(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x}\right)} \right\|_X,$$

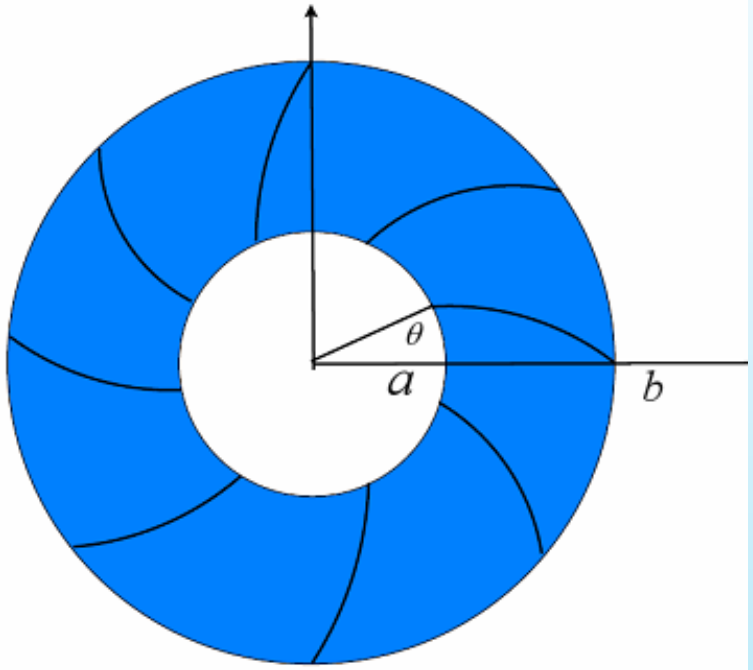
де $\left\{\boldsymbol{k}^j\right\}_{j=1}^{M}$ — набір векторів $\boldsymbol{k}^j = \left(k_1^j, \ldots, k_d^j\right) \in \mathbb{Z}^d$, $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, M$
—**величина найкращого M–членного тригонометричного наближення класу F у просторі X**.

Згідно з означеннями, при $M \asymp 2^n n^{d-1}$ справедливе співвідношення

$$E_{Q_n}(F)_X \geq e_M(F)_X.$$

Обертання при квазіконформних відображеннях: проблема Ф. Джона

Fritz John



Нелінійна теорія пружності

- $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ біліпшіцево відображення: $|z-\zeta|/L \le |f(z)-f(\zeta)| \le L|z-\zeta|$, де $L = 1+\varepsilon$
- $f(z) = z, |z| > b$
- $f(z) = ze^{i\theta}, |z < a \ (0 < a < b)$

Тоді

$$|\theta| \le C(1+\ln(\frac{b}{a}))\epsilon$$

F.John, *Rotation and strain*, Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), 91--413.

Теорема. Для довільного $L \ge 1$ справедлива точна оцінка

$$|\theta| \le \left(L - \frac{1}{L}\right)\ln\frac{b}{a}$$

Екстремалі мають вигляд:

$$f(z) = ze^{-i\theta\frac{\ln(\frac{|z|}{b})}{\ln b/a}}$$

Конформна диференційованість

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ квазіконформне відображення, яке задовольняє рівняння Бельтрамі $f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z$

Теорема. Якщо $\int_{|z|<1} \frac{|\mu(z)|^2 dxdy}{|z|^2} < \infty$ і існує $\lim_{r \to 0} \int_{|z|<r} \frac{\mu(z) dxdy}{z^2}$, то f конформно в 0.

Спектри компактних збурень лінійних операторів

$A = A_0 + B$, де B — ядерний оператор

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A_0),$$

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A) \cup \sigma_d(A)$$

Задача: опис дискретного спектра $\sigma_d(A)$ (ізольовані власні значення скінченної алгебраїчної кратності)

Визначник збурення
$L(z) = \det(I + (A - A_0)(A_0 - z)^{-1})$
— аналітична функція на резольвентній множині A_0

Дискретний спектр $\sigma_d(A)$ співпадає з нулями визначника збурення; алгебраїчна кратність дорівнює порядку кореня (М.Г. Крейн)

Нехай аналітична в колі функція f задовольняє

$$|f(0)| = 1, \log|f(z)| \leq \frac{K}{d^q(z,E)}, q \geq 0, K > 0,$$

E — замкнена множина на одиничному колі,
$d(z,E)$ — відстань від d до E.
Тоді дивізор нулів $Z(f)$ задовольняє умову типу Бляшке: $\forall \varepsilon > 0$:

$$\sum_{\lambda \in Z(f)} (1 - |\lambda|) d^{q-\alpha(E)+\varepsilon}(\lambda, E) < C(E, q, \varepsilon) K$$

$\alpha(E)$ — тип Ахерна-Кларка множини E

Умова типу Бляшке залежить не лише від модулів, а й від аргументів нулів

Критерій Вінера регулярності межової точки для параболічного рівняння p-Лапласа

$$u_t - \Delta_p u = 0, \ \ (x,t) \in \Omega_T = \Omega \times (0,T),$$

$$u = f \text{ на } \partial\Omega_T, \ \ f \in C(\partial\Omega_T)$$

$$\lim_{\Omega_T \ni (x,t) \to (x_0,t_0) \in \partial\Omega_T} u(x,t) = f(x_0,t_0) \ \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0 \left(\frac{C_p(B_r(x_0)\backslash\Omega)}{r^{n-p}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} = +\infty$$

$C_p(E)$ — p-місткість множини E: $C_p(E) = \inf_{\varphi \in m(E)} \int |\nabla\varphi|^p dx$

Точні поточкові оцінки фундаментального розв'язку для анізотропного параболічного рівняння p-Лапласа

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \left(|u_{x_i}|^{p_i - 2} u_{x_i} \right)_{x_i} = \delta(x,t), \ 1 < p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n < p\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$u(x,t) \asymp \left(t^{\frac{1}{\varkappa}} + \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{p_i}{p + n(p - p_i)}} \right)^{-n}, \ \varkappa = p + n(p-2) > 0$$