

Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б.І.Веркіна

«Аналітичні методи теорії функцій та їх застосування»
представлена на здобуття Державної премії в галузі науки і техніки
України за 2020 рік

Голінський Леонід Борисович, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу теорії функцій Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України, м. Харків.

Гутлянський Володимир Якович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, радник при дирекції Інституту прикладної математики і механіки НАН України, м. Слов'янськ.

Єгорова Ірина Євгенівна, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу математичної фізики Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України, м. Харків.

Котляров Володимир Петрович, доктор фізико-математичних наук, професор, головний науковий співробітник відділу математичної фізики Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України, м. Харків.

Романюк Анатолій Сергійович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, м. Київ.

Скрипнік Ігор Ігорович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, доцент, директор Інституту прикладної математики і механіки НАН України, м. Слов'янськ.

Шепельський Дмитро Георгійович, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу математичної фізики Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України, м. Харків.

Реферат
Харків – 2020

Робота «Аналітичні методи теорії функцій та їх застосування» охоплює результати досліджень, викладених у 6 монографіях і 133 наукових статтях, які опубліковані протягом періоду 1976 – 2018 рр. Три монографії опубліковано у високореєтингових англійських видавництвах Springer, Walter de Gruyter, European Mathematical Society, ще три – у видавництвах “Наукова думка”, “Akademperiodyka” (проект “Українська наукова книга іноземною мовою”), видавництві Інституту математики НАН України.

Наукові праці авторів роботи опубліковано переважно у високореєтингових реферованих англійських закордонних наукових виданнях (106 робіт). Крім того, 14 статей опубліковано у провідних наукових журналах України, 13 – у виданнях АН СРСР та Російської АН. Ці публікації забезпечили високий рівень параметрів цитування всієї роботи:

- 2054 цитування згідно з базою Scopus (h-індекс 24),
- 1850 цитувань згідно з базою Web of Science (h-індекс 22),
- 4080 цитувань згідно з базою Google Scholar (h-індекс 33).

Головною метою досліджень, що увійшли до роботи, є розбудова та вдосконалення таких методів та підходів теорії функцій, які мають ефективні застосування до широкого спектру проблем математики, зокрема, математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. На цьому шляху були досліджені актуальні задачі теорії інтегрованих нелінійних диференціальних та скінченнорізницевого рівнянь, конформних, квазіконформних та квазірегулярних відображень, нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь, комплексного аналізу несамопряжених операторів, спектральної теорії матричних різницевого рівнянь, лінійної та нелінійної апроксимації періодичних функцій багатьох змінних. У свою чергу, розв’язання цих задач дозволило створити ефективні методи дослідження математичних моделей актуальних проблем природознавства, зокрема, у гідромеханіці (теорії хвиль на мілкій та глибокій воді), фізиці хвиль оптичного діапазону, теорії

горіння, процесів дифузії і абсорбції при хімічних реакціях в анізотропних та неоднорідних середовищах.

Для досягнення мети роботи було значно розвинуто та узагальнено:

- метод скінченнозонного інтегрування нелінійних рівнянь,
- методи оберненої задачі розсіяння у формі рівнянь Марченка і задачі Рімана-Гільберта для задач Коші з початковими даними типу «сходінки» для інтегровних нелінійних диференціальних та різницевих рівнянь,
- методи задачі Рімана-Гільберта для початково-крайових задач для інтегровних нелінійних рівнянь,
- асимптотичні методи для початкових та початково-крайових задач для інтегровних нелінійних рівнянь на основі асимптотичного аналізу рівнянь Марченка та задач Рімана-Гільберта,
- методи комплексного аналізу, геометричної теорії конформних і квазіконформних відображень та їх застосування до теорії диференціальних рівнянь,
- методи дослідження внутрішніх та граничних властивостей розв'язків нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь,
- методи комплексного аналізу в теорії несамоспряжених операторів,
- методи лінійної та нелінійної апроксимації класів періодичних функцій багатьох змінних,
- теорію ортогональних поліномів і матриць Якобі, теорію унітарних CMV матриць та матричних моделей,
- методи теорії аналітичних функцій та теорії потенціалу із застосуваннями до теорії збурень лінійних операторів.

Основні наукові результати, які отримано у даній роботі, полягають у наступному:

отримано фундаментальні результати з алгебро-геометричного (скінченнозонного) інтегрування нелінійних рівнянь Шредінгера і Гайзенберга та рівняння синус-Гордона, які мають застосування у теорії модуляційної нестійкості і теорії «дивних» хвиль (як океанських так і оптичного діапазону), магнетизмі, геометрії поверхонь від'ємної кривини;

отримано результати про калібровану еквівалентність нелінійних рівнянь Шредінгера і Ландау-Ліфшиця, рівняння синус-Гордона і рівняння Полмейєра-Лунда-Редже, нелінійних рівнянь Максвела-Блоха і рівнянь стимульованого раманівського розсіювання;

побудовано теорію дослідження асимптотичної поведінки нелокалізованих розв'язків інтегровних рівнянь у околі переднього фронту, зокрема, розв'язків типу сходінки, які якісно моделюють ударні хвилі різноманітної природи; конструктивно доведено, що хвильовий фронт являє собою нелінійну суперпозицію асимптотичних солітонів;

відкрито новий вид зігнутих асимптотичних солітонів для рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі, які моделюють хвилі на воді при руйнуванні дамби;

розвинуто узагальнення аналітичної теорії матричних задач Рімана-Гільберта, яке дозволило виявити та строго обґрунтувати нові асимптотичні режими (у площині простір-час) для модифікованого рівняння Кортвега - де Фріза, нелінійного рівняння Шредінгера, моделі стимульованого раманівського розсіювання, для яких розглядаються як початкові, так і початково-крайові задачі;

доведена інтегровність (лінеарізованість) змішаної задачі для нелінійних рівнянь Максвела-Блоха за наявності неоднорідного уширення частот переходу дворівневих атомів;

запропоновано метод побудови, в термінах тета-функцій, унімодулярних матричних функцій Бейкера-Ахієзера на комплексній площині з розтинами для нелінійного рівняння Шредінгера і нелінійних рівнянь Максвела-Блоха із довільним

неоднорідним уширенням, і побудовані нові явні формули для відповідних скінченнозонних розв'язків;

побудовано теорію розсіювання для одновимірного оператора Шредінгера на осі з асимптотично скінченнозонним потенціалом типу сходинки;

розв'язано задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза (КдФ) і модифікованого рівняння КдФ із асимптотично скінченнозонними початковими умовами типу сходинки, що мають задану гладкість і число скінченних моментів збурення;

розв'язано пряму й обернену задачі розсіювання для оператора Якобі на осі з коефіцієнтами, що є асимптотично близькими до коефіцієнтів різних скінченнозонних операторів на різних півосях;

проінтегровано рівняння ієрархії Тоди в класі асимптотично скінченнозонних початкових умов типу сходинки;

методом оберненої задачі розсіювання отримано асимптотичні солітони для ланцюжка Тоди поблизу переднього хвильового фронту;

розвинуто метод векторних задач Рімана-Гільберта для опису та обґрунтування асимптотичної поведінки хвиль стиску та розрідження для рівнянь Кортевега-де Фріза та ланцюжка Тоди за великим часом;

проінтегровано нелінійне дефокусує рівняння Шредінгера в класах майже періодичних початкових умов, що мають заданий спектр канторівського типу;

розвинуто метод аналітичної факторизації, заснований на задачі Рімана-Гільберта, для аналізу обернених задач для систем диференціальних рівнянь у випадку складної залежності від спектрального параметра, що виникають при моделюванні розповсюдження хвиль у анізотропних та бі-ізотропних середовищах;

запропоновано метод оберненої задачі у формі задачі Рімана-Гільберта для інтегрування нелінійного рівняння Камаси-Хольма та інших моделей розповсюдження хвиль на мілкій воді, а також низки нелінійних піконних рівнянь типу Камаси-Хольма (рівняння Дегасперіса-Прочесі, рівняння Новікова, рівняння Островського-Вахненка).

розвинуто метод задачі Рімана-Гільберта для інтегрування нелінійних рівнянь, що є короткохвильовими границями рівнянь типу Камаси-Хольма, зокрема, рівняння короткого імпульсу;

отримано детальний опис асимптотичної (за великим часом) поведінки розв'язків початкових задач для піконних рівнянь;

досліджено вплив крайових умов на асимптотику розв'язків початково-крайових задач для піконних рівнянь та отримано детальний опис асимптотичної поведінки розв'язків таких задач;

отримано характеристизацію однофазної поведінки крайових значень Неймана для початково-крайової задачі для нелінійного рівняння Шредінгера у випадку періодичної однофазної поведінки крайової умови Діріхле;

розвинуто метод Льовнера-Куфарєва у теорії однолистих функцій та наведено інтегро-диференціальні параметричні зображення основних класів конформних відображень круга і кругового кільця, що дозволило розробити ефективний метод дослідження екстремальних проблем для однолистих функцій шляхом їх редукції до лінійних екстремальних задач на опуклому класі Каратеодорі регулярних функцій з додатною дійсною частиною;

розв'язано загальну проблему викривлення і обертання при конформних відображеннях одиничного круга;

розроблено варіаційний метод для квазіконформних відображень площини, які є розв'язками квазілінійного рівняння Бельтрамі з обмеженнями на комплексну характеристику загального вигляду;

для квазіконформних гомеоморфізмів площини, конформних в одиночному крузі, вперше дано точний розв'язок задачі про радіус зоряності та встановлені точні двосторонні оцінки модуля відображуючої функції.

створено новий метод дослідження локальної поведінки квазіконформних і більш загальних відображень на площині та у просторі, без умови диференційованості, на

основі введеного поняття інфінітезимального простору. Для квазіконформних відображень на площині доведено, що апроксимативна неперервність комплексної характеристики у заданій точці притягує типові геометричні якості конформності для самого відображення в околі цієї точки;

знайдено еквівалентні умови в термінах квазіконформних відображень і їх комплексних характеристик, що забезпечують асимптотичну конформність квазіконформних кривих. Встановлено ефективні достатні умови спрямлюваності та гладкості таких кривих. Для квазісиметричних відображень дійсної осі досліджено симетрії Гардінера-Саллівана і доведено критерії того, що квазісиметричний автоморфізм є асимптотично симетричним або асимптотично конформним у значенні Карлесона;

для лінійних еліптичних систем на площині, доведено теореми зображення через квазіконформні гомеоморфізми розв'язків з логарифмічними особливостями і досліджена проблема регулярності;

розроблені нові методи дослідження крайових задач для напівлінійних рівнянь дивергентного виду, що виникають у математичних моделях теорії горіння, процесів дифузії і абсорбції при хімічних реакціях в анізотропних та неоднорідних середовищах;

в плані розвитку методів доведення регулярності розв'язків нелінійних еліптичних і параболічних рівнянь, розвинуто методи отримання апріорних оцінок зверху і знизу, що дають можливість оцінити розв'язок рівняння через функцію точки або функцію множини;

застосовано метод Кіппелайнена та Мали та доведено неперервність та нерівність Харнака для побудови якісної теорії нелінійних параболічних рівнянь з сингулярними молодшими членами;

доведено точну умову неперервності слабкого розв'язку еволюційного рівняння ρ -Лапласа біля негладкої границі області в термінах розбіжності інтегралу Вінера;

отримано точні аналоги формули Пуассона для еволюційного рівняння p -Лапласа та рівняння пористого середовища в термінах параболічних потенціалів Вольфа та Ріса;

отримано точні поточкові оцінки сингулярних розв'язків для різноманітних нелінійних еліптичних і параболічних рівнянь з нестандартними умовами росту;

отримано точні умови, які забезпечують Гельдерову неперервність розв'язків анізотропного еліптичного рівняння;

для анізотропних еліптичних і параболічних рівнянь з сингулярною абсорбцією та градієнтною абсорбцією, доведено оцінки Келлера-Оссермана в термінах потенціалу Вольфа від абсорбційного члена, що дозволило побудувати якісну теорію таких рівнянь;

вперше застосовано ідеї спектральної теорії в контексті теорії ортогональних поліномів на одиничному колі. Запропоновано аналог розв'язку Вейля та розвинута теорія підпорядкованості;

виявлено роль мір Олександрова в теорії Сегьо та знайдено природний варіант спектрального усереднення, одержано нові результати стосовно поліноміального класу Сегьо та доведено спеціальний випадок гіпотези Саймона про узагальнені теореми Сегьо;

досліджено нові класи мір на одиничному колі в термінах асоційованих з ними параметрами Верблунського;

побудовано теорію розподілу нулів пара-ортогональних поліномів на одиничному колі та вивчено властивості точок носія міри ортогональності притягувати ці нулі;

методами теорії ортогональних поліномів на одиничному колі розв'язано задачу Коші для системи диференціально-різницевих рівнянь, відому як потік Шура та досліджено асимптотичну поведінку її розв'язків;

побудовано теорію аналітичних (субгармонійних) функцій нерадіального зростання в одиничному крузі та досліджено розподіл нульових множин (мір Ріса). Ці результати застосовано в теорії несамоспряжених збурень лінійних операторів;

отримано нові нерівності Лієба-Тірінга, які характеризують швидкість збігання дискретного спектру до спільного суттєвого спектру для несамоспряжених операторів Якобі та скінчено-зонних операторів;

встановлено точні за порядком оцінки найкращих наближень періодичних функцій багатьох змінних, що належать до класів Нікольського-Бесова, за допомогою тригонометричних поліномів зі спектрами у так званих східчасто-гіперболічних хрестах;

знайдено точні за порядком оцінки низки поперечників (колмогоровського, лінійного, тригонометричного та ортопоперечника) цих класів у просторах Лебега, що дозволило обґрунтувати доцільність використання для наближення функцій з класів Нікольського-Бесова саме тригонометричних поліномів, що мають вказану структуру;

запропоновано нові і модифіковано відомі методи дослідження апроксимативних характеристик найкращого тригонометричного і найкращого білінійного наближень функціональних класів Соболева і Нікольського-Бесова та з'ясовано переваги нелінійних методів наближення порівняно з класичними лінійними, а також виявлено низку ефектів, що виникають внаслідок особливостей багатовимірного випадку.

Отримані результати мають важливе значення для розвитку сучасних аналітичних і геометричних методів теорії функцій та їх застосувань до задач математичної і теоретичної фізики, теорії динамічних систем, теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними і, в свою чергу, до дослідження математичних моделей різноманітних фізичних явищ і процесів. У наукових працях, що увійшли до роботи, започатковано та розвинуто низку актуальних наукових напрямків світової фундаментальної науки. Про світову значимість результатів роботи свідчать їх публікація у провідних світових фахових виданнях та високий рівень параметрів цитування.

Наукові результати, отримані в роботах циклу, широко відомі провідним фахівцям з математичної і теоретичної фізики, теорії функцій та відображень, теорії

диференціальних рівнянь з частинними похідними, методів лінійної та нелінійної апроксимації. Автори роботи багаторазово виступали з науковими доповідями на міжнародних і вітчизняних математичних конгресах, конференціях і симпозиумах. За темою циклу захищено 12 докторських і 43 кандидатських дисертацій, а також 1 габілітація в університеті Париж-7 і 2 дисертації PhD (Віденський університет і університет Париж-7).

Перелік монографій та наукових публікацій, що увійшли до роботи, додається.

Автори роботи:

Доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник



Л.Б. Голінський

Член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор



В.Я. Гутлянський

Доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник



І.Є. Єгорова

Доктор фізико-математичних наук,
професор



В.П. Котляров

Доктор фізико-математичних наук,
професор



А.С. Романюк

Член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, доцент



І.І. Скрипнік

Доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник



Д.Г. Шепельський