Цикл наукових праць "Транспортні та релаксаційні властивості стохастичних систем із аномально повільною еволюцією"

Представлено
Інститутом прикладної фізики НАН України

Претендент: зав. лаб. №41 ІПФ НАН України, к.ф.-м.н.
Ю.С. Бистрик

Структура роботи

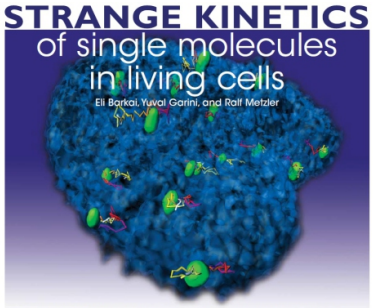
- Вступ
- Розділ 1. Асимптотичні у часі розв'язки для надповільних польотів Леві
- Розділ 2. Дослідження основних характеристик граничних густин ймовірності
- Розділ 3. Режими релаксації у дворівневих системах
- Розділ 4. Точні результати для релаксаційних процесів у дворівневих системах
- Висновки

Anomalous is Normal (c)

R. Metzler, J. Klafter / Physics Reports 339 (2000) 1–77

THE RANDOM WALK'S GUIDE TO ANOMALOUS DIFFUSION: A FRACTIONAL DYNAMICS APPROACH

Ralf METZLER, Joseph KLAFTER
School of Chemistry, Tel Aviv University, 69978 Tel Aviv, Israel



The irreproducibility of time-averaged observables in living cells poses fundamental questions for statistical mechanics and reshapes our views on cell biology.

Relaxation in filled polymers: A fractional calculus approach

Ralf Metzler
Department of Mathematical Physics, University of Ulm, Albert-Einstein-Allee 11, D-89069 Ulm/Donau, Germany
Winfried Schick and Hanns-Georg Kilian
Department of Experimental Physics, University of Ulm, Albert-Einstein-Alee 11, D-89069 Ulm/Donau, Germany
Theo F. Nonnenmacher
Department of Mathematical Physics, University of Ulm, Albert-Einstein-Alee 11, D-89069 Ulm/Donau, Germany

(Received 8 June 1995; accepted 21 July 1995)

In recent years the fractional calculus approach to describing dynamic processes in disordered or complex systems such as relaxation or dielectric behavior in polymers or photo blenching recovery in biologic membranes has proved to be an extraordinarily useful. In this paper we apply fractional relaxation to filled polymer networks and investigate the dependence of the decisive occurring parameters on the filler content. As a result, the dynamics of such complex systems may be well-described by our fractional model whereby the parameters agree with known phenomenological models. © *1995 American Institute of Physics.*

Cuckoo Search via Lévy Flights

Xin-She Yang
Department of Engineering,
University of Cambridge
Trumpinton Street
Cambridge CB2 1PZ, UK
Email: xy227@cam.ac.uk

Suash Deb
Department of Computer Science & Engineering
C. V. Raman College of Engineering
Bidyanagar, Mahura, Janla
Bhubaneswar 752054, INDIA
Email: suashdeb@gmail.com

Abstract—In this paper, we intend to formulate a new meta-heuristic algorithm, called Cuckoo Search (CS), for solving optimization problems. This algorithm is based on the obligate brood parasitic behaviour of some cuckoo species in combination with the Lévy flight behaviour of some birds and fruit flies. We validate the proposed algorithm against test functions and then compare its performance with those of genetic algorithms and particle swarm optimization. Finally, we discuss the implication of the results and suggestion for further research.

Index Terms—algorithm; cuckoo search; Lévy flight; meta-heuristics; nature-inspired strategy; optimization;

II. Cuckoo Behaviour and Lévy Flights

A. Cuckoo Breeding Behaviour

Cuckoo are fascinating birds, not only because of the beautiful sounds they can make, but also because of their aggressive reproduction strategy. Some species such as the *ani* and *Guira* cuckoos lay their eggs in communal nests, though they may remove others' eggs to increase the hatching probability of their own eggs [12]. Quite a number of species engage the obligate brood parasitism by laying their eggs in the nests of other host birds (often other species). There are three

ELSEVIER
Physics Reports 371 (2002) 461–580
PHYSICS REPORTS
www.elsevier.com/locate/physrep

Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport

G.M. Zaslavsky[a,b,*]
[a]*Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 251 Mercer Street, New York, NY 10012, USA*
[b]*Department of Physics, New York University, 2-4 Washington Place, New York, NY 10003, USA*

Received 1 July 2002
editor: D.K. Campbell

VOLUME 58, NUMBER 11 PHYSICAL REVIEW LETTERS 16 MARCH 1987

Lévy Dynamics of Enhanced Diffusion: Application to Turbulence

M. F. Shlesinger
Physics Division, Office of Naval Research, Arlington, Virginia 22217
B. J. West
Institute for Nonlinear Science, University of California, San Diego, La Jolla, California 92093
and
J. Klafter
Corporate Research Science Laboratory, Exxon Research and Engineering Company, Annandale, New Jersey 08801
(Received 10 February 1986; revised manuscript received 17 November 1986)

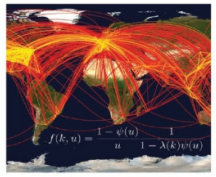
We introduce a stochastic process called a Lévy walk which is a random walk with a nonlocal memory coupled in space and in time in a scaling fashion. Lévy walks result in enhanced diffusion, i.e., diffusion that grows as t^{α}, $\alpha > 1$. When applied to the description of a passive scalar diffusing in a fluctuating fluid flow the model generalizes Taylor's correlated-walk approach. It yields Richardson's t^3 law for the turbulent diffusion of a passive scalar in a Kolmogorov $-\frac{5}{3}$ homogeneous turbulent flow and also gives the deviations from the $\frac{3}{2}$ exponent resulting from Mandelbrot's intermittency. The model can be extended to studies of chemical reactions in turbulent flow.

PACS numbers: 47.25.Jn, 05.40.+j

Edited by
R. Klages, G. Radons, and I. M. Sokolov
WILEY-VCH

Anomalous Transport

Foundations and Applications



VOLUME 82, NUMBER 19 PHYSICAL REVIEW LETTERS 10 MAY 1999

Slip Diffusion and Lévy Flights of an Adsorbed Gold Nanocluster

W.D. Luedtke and Uzi Landman
School of Physics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia 30332-0430
(Received 11 January 1999)

Anomalous diffusion of a gold nanocrystal Au_{55}, adsorbed on the basal plane of graphite, exhibiting Lévy-type power-law flight-length and sticking-time distributions, is predicted through extensive molecular dynamics simulations. An atomistic collective slip-diffusion mechanism is proposed and analyzed. [S0031-9007(99)09082-1]

PACS numbers: 68.35.Fx, 05.40.−a, 36.40.Sx, 61.46.+w

Anomalous Diffusion on Percolating Clusters

Yuval Gefen and Amnon Aharony
Department of Physics and Astronomy, Tel Aviv University, Ramat Aviv, Israel
and
Shlomo Alexander
The Racah Institute of Physics, The Hebrew University, Jerusalem, Israel
(Received 7 September 1982)

The mean square distance reached after t random-walk steps on a percolating cluster is shown to behave as $t^{2/(z+\theta)}$ (instead of t) for short times (for which the cluster is seen to be self-similar). The exponent θ is related to that describing the dc conductivity near percolation. Averaging over all clusters yields the ac conductivity and dielectric constant near percolation in the high-frequency limit, when the polarization of the medium is unimportant.

PACS numbers: 71.30.+h, 05.50.+q

FEATURES

An increasing number of natural phenomena do not fit into the relatively simple description of diffusion developed by Einstein a century ago

Anomalous diffusion spreads its wings

Joseph Klafter and Igor M Sokolov

Strange behaviour – albatrosses fly by the rules of anomalous diffusion.

As ALL of us are no doubt aware, this year has been declared "world year of physics" to celebrate the three remarkable breakthroughs made by Albert Einstein in 1905. However, it is not so well known that Einstein's work on Brownian motion – the random motion of tiny particles first observed and investigated by the botanist Robert Brown in 1827 – has been cited more times in the scientific literature than his more famous papers on special relativity and the quantum nature of light. In a series of publications that included his doctoral thesis, Einstein showed that the diffusion equation, which, when written in terms of probability, is $\partial p/\partial t = D\partial^2 p/\partial x^2$, where p gives the probability of finding an object at a certain position x, at a time t, and D is the diffusion coefficient. Fick went on to show that the mean-squared displacement of an object undergoing diffusion is $2Dt$.

However, Fick's approach was purely phenomenological, based on an analogy with Fourier's heat equation – it took Einstein to derive the diffusion in living organisms. In 1855 Fick published the famous diffusion equation,

REVIEWS OF MODERN PHYSICS, VOLUME 87, APRIL–JUNE 2015

Lévy walks

V. Zaburdaev*
Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems, Nöthnitzer Strasse 38, D-01187 Dresden, Germany
S. Denisov†
Institute of Physics, University of Augsburg, Universitätstrasse 1, D-86159 Augsburg, Germany, Lobachevsky State University, Gagarin Avenue 23, 603950 Nizhny Novgorod, Russia, and Sumy State University, Rimsky-Korsakov Street 2, 40007 Sumy, Ukraine
J. Klafter‡
School of Chemistry, Tel Aviv University, 69978 Tel Aviv, Israel
(published 9 June 2015)

Random walk is a fundamental concept with applications ranging from quantum physics to econometrics. Remarkably, one specific model of random walks appears to be ubiquitous across many fields as a tool to analyze transport phenomena in which the dispersal process is faster than dictated by Brownian diffusion. The Lévy-walk model combines two key features, the ability to generate anomalously fast diffusion and a finite velocity of a random walker. Recent results in optics, Hamiltonian chaos, cold atom dynamics, biophysics, and behavioral science demonstrate that this particular type of random walk provides significant insight into complex transport phenomena. This review gives a self-consistent introduction to Lévy walks, surveys their existing applications, including latest advances, and outlines further perspectives.

DOI: 10.1103/RevModPhys.87.483 PACS numbers: 02.50.−r, 05.40.Fb, 87.10.−e, 89.75.−k

VOLUME 79, NUMBER 20 PHYSICAL REVIEW LETTERS 17 NOVEMBER 1997

Anomalous Transport in Random Fracture Networks

Brian Berkowitz and Harvey Scher
Environmental Sciences, Weizmann Institute of Science, 76100 Rehovot, Israel
(Received 15 July 1997)

We show that dominant aspects of contaminant (particle) transport in random fracture networks—non-Gaussian propagation—result from subtle features of the steady flow-field distribution through the network. This is an outcome of a new theory, based on a continuous time random walk formalism, structured to retain the key space-time correlations of contaminants as they are advected across each fracture segment. Particle tracking simulations on these networks exhibit the same non-Gaussian profiles, demonstrating quantitative agreement with the theory. [S0031-9007(97)04494-3]

PACS numbers: 91.60.−x, 47.55.Mh, 92.40.−t

feature article

Beyond quantum jumps: Blinking nano-scale light emitters

Fernando D. Stefani, Jacob P. Hoogenboom, and Eli Barkai

On the nanoscale, almost all light sources blink. Surprisingly, such blinking occurs on time scales much larger than predicted by quantum mechanics and has statistics governed by nonergodicity.

PRL 106, 048103 (2011) week ending 28 JANUARY 2011 PHYSICAL REVIEW LETTERS

***In Vivo* Anomalous Diffusion and Weak Ergodicity Breaking of Lipid Granules**

Jae-Hyung Jeon,[1] Vincent Tejedor,[2] Stas Burov,[3] Eli Barkai,[3] Christine Selhuber-Unkel,[4,5] Kirstine Berg-Sørensen,[6] Lene Oddershede,[4] and Ralf Metzler[1,7]
[1]*Physics Department T30g, Technical University of Munich, 85747 Garching, Germany*
[2]*Physique Théorique de la matière condensée, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75252 Paris, France*
[3]*Physics Department, Bar-Ilan University, Ramat Gan 52900, Israel*
[4]*Niels Bohr Institute, Blegdamsvej 17, 2100 København Ø, Denmark*
[5]*Institute for Materials Science, University of Kiel, Kaiserstraße 2, 24143 Kiel, Germany*
[6]*Physics Department, Technical University of Denmark, 2800 Kongens Lyngby, Denmark*
[7]*Department of Physics, Tampere University of Technology, FI-33101 Tampere, Finland*
(Received 2 October 2010; published 25 January 2011)

Combining extensive single particle tracking microscopy data of endogenous lipid granules in living fission yeast cells with analytical results we show evidence for anomalous diffusion and weak ergodicity breaking. Namely we demonstrate that at short times the granules perform subdiffusion according to the laws of continuous time random walk theory. The associated violation of ergodicity leads to a characteristic turnover between two scaling regimes of the time averaged mean squared displacement. At longer times the granule motion is consistent with fractional Brownian motion.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.048103 PACS numbers: 87.16.dj, 02.50.−r, 05.40.−a, 87.10.Ma

REVIEW ARTICLES | FOCUS
PUBLISHED ONLINE: 27 FEBRUARY 2013 | DOI: 10.1038/NPHOTON.2013.29
nature photonics

Disordered photonics

Diederik S. Wiersma

What do lotus flowers have in common with human bones, liquid crystals with colloidal suspensions, and white beetles with the beautiful stones of the Taj Mahal? The answer is they all feature disordered structures that strongly scatter light, in which light waves entering the material are scattered several times before exiting in random directions. These randomly distributed rays interfere with each other, leading to interesting, and sometimes unexpected, physical phenomena. This Review describes the physics behind the optical properties of disordered structures and how knowledge of multiple light scattering can be used to develop new applications. The field of disordered photonics has grown immensely over the past decade, ranging from investigations into fundamental topics such as Anderson localization and other transport phenomena, to applications in imaging, random lasing and solar energy.

Vol 453|22 May 2008|doi:10.1038/nature06948 nature

LETTERS

A Lévy flight for light

Pierre Barthelemy[1], Jacopo Bertolotti[1] & Diederik S. Wiersma[1]

ANOMALOUS DIFFUSION IN DISORDERED MEDIA: STATISTICAL MECHANISMS, MODELS AND PHYSICAL APPLICATIONS

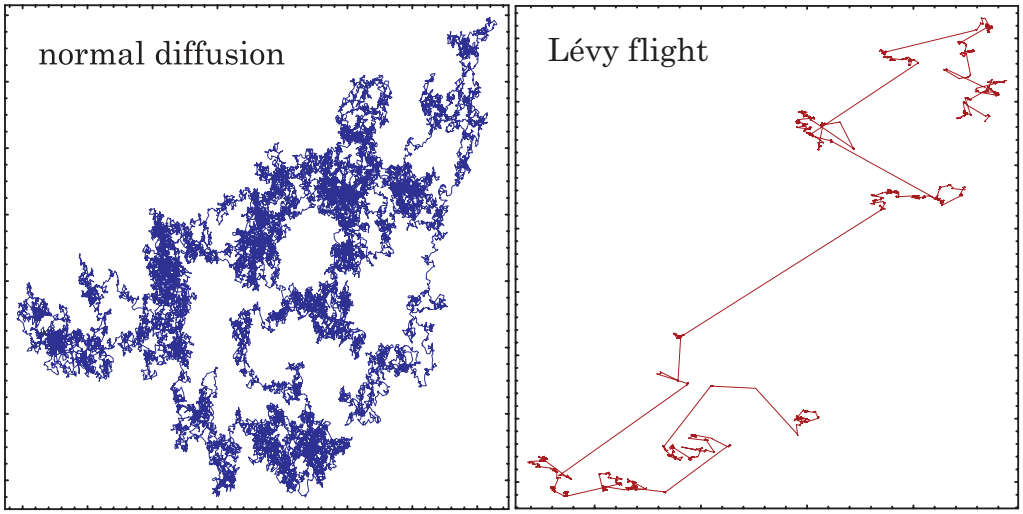
Jean-Philippe BOUCHAUD
Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure, 24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France
and
Antoine GEORGES
Laboratoire de Physique Théorique de l'Ecole Normale Supérieure, 24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

Актуальність теми дослідження

Актуальність та мотивація:

- складні системи різноманітної природи часто демонструють повільну недебаївську релаксація та аномальні транспортні властивості;
- наявність відкритих проблем у теорії надповільних стохастичних процесів;
- необхідність розвинення теоретичних методів дослідження аномально повільних процесів.

Рис. 1. Порівняння типових траєкторій руху для нормальної дифузії та польотів Леві (масштаби на вкладках зліва та справа є різними).



Мета, об'єкт і предмет дослідження

Метою роботи є послідовне теоретичне вивчення еволюції надповільних польотів Леві та аномальних релаксаційних процесів у дворівневих системах за допомогою підходу неперервних у часі випадкових блукань.

Об'єкт досліджень. Процеси еволюції в нерівноважних системах, параметри стану яких описуються повільними та надповільними випадковими блуканнями з неперервним часом.

Предмет досліджень. Транспортні та релаксаційні властивості стохастичних систем із аномально повільною поведінкою.

Завдання дослідження

Завдання:

- узагальнити метод неперервних у часі випадкових блукань на випадок важких хвостів розподілу довжин стрибків процесу та надважких хвостів розподілу часів очікування між ними;
- знайти та класифікувати всі можливі граничні густини ймовірності та відповідні їм масштабуючі функції часу, що визначають асимптотичну поведінку надповільних польотів Леві;
- в рамках моделі неперервних у часі випадкових блукань отримати рівняння релаксації для дворівневих систем, структурні елементи яких є незалежними і еволюціонують згідно з дихотомічним процесом;
- визначити всі можливі асимптотичні (повільні та надповільні) та деякі точні закони релаксації у дворівневих системах для випадків, коли розподіли часів перебування процесу у двох своїх станах мають важкі та/або надважкі хвости.

Зв'язок роботи з науковими програмами

Цикл наукових праць виконаний у Сумському державному університеті та у Інституті прикладної фізики НАН України.

Результати роботи отримано під час виконання держбюджетних науково-дослідних робіт:

- "Вимушена та спонтанна магнітна динаміка систем одноосних наночастинок", за підтримки МОН (№ 010U001379, 2009 – 2011 рр.);
- "Аномальні дифузійні та релаксаційні властивості класичних та квантових блукань з неперервним часом", за підтримки МОН (№ 0112U001383, 2012 – 2014 рр.);
- "Магнітні, теплові та транспортні властивості періодично збуджених систем феромагнітних наночастинок", за підтримки МОН (№ 0116U002622, 2016 – 2018 рр.);
- "Спрямований транспорт та дисипація енергії в системах феромагнітних наночастинок і магнітних скірміонів", за підтримки МОН (№ 0119U100772, 2019 – 2021 рр.).
- "Інтегроване багаторівневе моделювання і експериментальна перевірка радіаційної стійкості конструкційних матеріалів реакторів на період експлуатації понад 60 років", за підтримки НАН України (№ К-1-17-10, 2019 – 2021 рр.).

Наукове та практичне значення результатів

Наукова новизна отриманих результатів:

- Вперше запропоновано теорію надповільних польотів Леві, знайдено та детально проаналізовано всі граничні густини ймовірності для даного процесу, і проведено їх класифікацію в залежності від параметрів моделі.
- Вперше знайдено всі асимптотичні закони релаксації для дворівневих системах, структурні елементи яких змінюються згідно з дихотомічним процесом, проведено їх класифікацію, а в окремих випадках отримано точні закони релаксації.

Практичне значення одержаних результатів.

Результати роботи описують залежності, що спостерігаються для аномальних релаксаційних процесів, пов'язаних з ущільненням матеріалів та адсорбцією-десорбцією речовин, а також можуть бути використані при дослідженні особливостей руху дефектів у неоднорідних та багатокомпонентних середовищах, моделюванні дифузійних та транспортних процесів в конструкційних матеріалах.

Аномальні стохастичні процеси

Закони дифузії:

- $\sigma^2(t) \propto t$ – класична броунівська дифузія;
- $\sigma^2(t) \propto t^\alpha$ – аномальна дифузія ($0<\alpha<1$ – субдифузія, $\alpha>1$ – супердифузія);
- $\sigma^2(t) \propto \ln^4 t$ – дифузія Синая;
- $\sigma^2(t) = \infty$ – ***польоти Леві***.

Релаксаційні закони:

- $\mu(t) = \mu_0 e^{-t/T}$ – класична дебаївська релаксація;
- $\mu(t) = \mu_0 e^{-(t/T)^\beta}$ $(0 < \beta < 1)$ – закон Кольрауша-Уільямса-Уотсса;
- $\mu(t) \propto (t/T)^{-\gamma}$ $(\gamma>0)$ – ***повільна*** степенева релаксація;
- $\mu(t) \propto \frac{1}{\ln(t/T)}$ – ***надповільна*** логарифмічна релаксація.

Методи опису аномальних процесів:

- випадкові блукання (стрибкоподібна модель);
- рівняння Ланжевена (континуальна модель).

CTRW – неперервний у часі стрибкоподібний процес

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \xi_n,$$

де $\{\xi_n\}$ – довжини випадкових стрибків; $\{\tau_n\}$ – випадкові часи очікування між ними; $N(t)$ – число стрибків за час t.

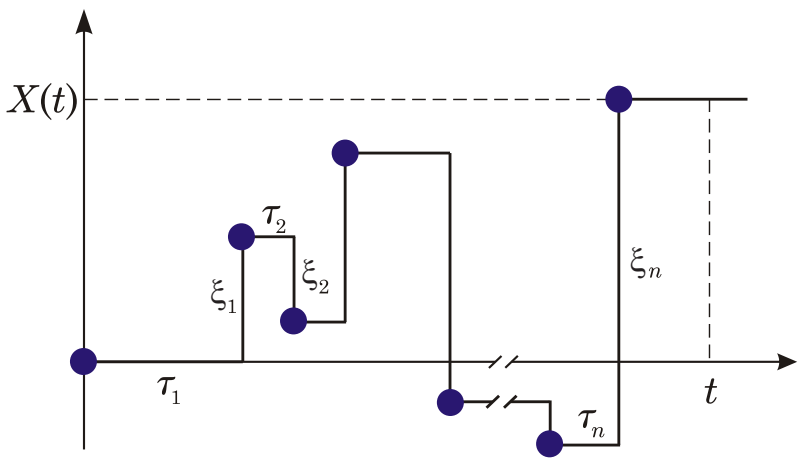


Рис. 2. CTRW-процес на прямій.

Якщо множини $\{\tau_n\}$ і $\{\xi_n\}$ – незалежні та розподілені згідно з густинами $p(\tau)$ і $w(\xi)$, то у просторі Фур'є-Лапласа густина ймовірності $P(x,t)$ положення частинки $X(t)$ описується ***рівнянням Монтролла-Вейсса*** ($x \xrightarrow{\mathcal{F}} k$, $t \xrightarrow{\mathcal{L}} s$)

$$P_{ks} = \frac{1 - p_s}{s(1 - p_s w_k)}. \tag{1}$$

Модель надповільних польотів Леві.

Густина ймовірності довжин стрибків із ***важкими*** хвостами

$$w(\xi) \sim \frac{u_\pm}{|\xi|^{1+\alpha_\pm}} \quad (|\xi| \to \infty), \tag{2}$$

де параметри $u_\pm > 0$ та $\alpha_\pm \in (0, 2]$.

Із (2) слідує: $\langle |x|^\eta \rangle = \infty$ при всіх $\eta \geq \alpha$, де $\alpha = \min\{\alpha_\pm\}$. Отже, ***дисперсія*** довжини стрибка завжди ***нескінченна***.

Густина ймовірності часів очікування із ***надважким*** хвостом

$$p(\tau) \sim \frac{h(\tau)}{\tau} \quad (\tau \to \infty), \tag{3}$$

де функція $h(\nu\tau) \sim h(\tau)$ при $\tau \to \infty$ для всіх $\nu > 0$.

Із (3) слідує: $\langle |\tau|^\eta \rangle = \infty$ при всіх $\eta > 0$, тобто ***всі моменти*** часу очікування ***нескінченні***.

Для координати $Y(t) = a(t)X(t)$ ***гранична густина ймовірності***

$$\mathcal{P}(y) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{a(t)} P\left(\frac{y}{a(t)}, t\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-iky}}{1+\Phi(k)}, \tag{4}$$

де $\Phi(k) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1-w_{ka(t)}}{V(t)}$, $V(t) = \int_t^\infty d\tau p(\tau)$ і ***масштабуюча функція*** $a(t) \to 0$ вибирається такою, щоб густина $\mathcal{P}(y)$ була невиродженою.

Якщо (1) $l_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi w(\xi) \neq 0$, (2) $\rho = u_+\delta_{1\alpha_+} - u_-\delta_{1\alpha_-} \neq 0$ з $\alpha = 1$ або (3) $\alpha_\pm = 2$, то маємо

$$\boxed{\mathcal{P}(y) = e^{-|y|}H(l_1 y),\ \mathcal{P}(y) = e^{-|y|}H(\rho y) \text{ або } \mathcal{P}(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}} \tag{5}$$

відповідно. Тут $H(\cdot)$ – функція Хевісайда.

Якщо (1) $\alpha \in (0,1)$, (2) $\alpha \in (1,2)$ з $l_1 = 0$ або (3) $\rho = 0$ (тобто $\alpha_\pm = 1$ і $u_\pm = u$), то $\mathcal{P}(y)$ дається виразом

$$\boxed{\mathcal{P}(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk \frac{(1+\cos\varphi\, k^\alpha)\cos(yk) + \sin\varphi\, k^\alpha \sin(yk)}{1 + 2\cos\varphi\, k^\alpha + k^{2\alpha}},} \tag{6}$$

де $\alpha = \min\{\alpha_\pm\}$ і φ залежить від хвостових параметрів $w(\xi)$.

Поведінка масштабуючих функцій при $t \to \infty$

Характеристики $w(\xi)$	**Поведінка** $a(t)$
$l_1 \neq 0$ $(l_1 < \infty)$	$a(t) \sim V(t)/\lvert l_1 \rvert$
$\alpha \in (0,1)$ $\alpha = 1$ при $\rho = 0$ $\alpha \in (1,2)$ при $l_1 = 0$	$a(t) \sim \left(V(t)/\sqrt{q^2+r^2}\right)^{1/\alpha}$
$\alpha = 1$ при $\rho \neq 0$	$a(t) \sim \frac{V(t)}{\lvert\rho\rvert \ln[1/V(t)]}$
$\alpha = 2$ при $l_1 = 0$	$a(t) \sim 2\sqrt{\frac{V(t)}{(u_+ + u_-)\ln[1/V(t)]}}$

Тут константи q і r задаються параметрами хвостів $w(\xi)$.

Функції $a(t)$ ***повільно змінюються на нескінченності***, тобто $a(\nu t) \sim a(t)$ при $t \to \infty$ для будь-якого $\nu > 0$.

Зручне альтернативне представлення граничної густини

$$\boxed{\mathcal{P}(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dx e^{-|y|x}\frac{\sin[\phi(y)]x^\alpha}{1+2\sin[\phi(y)]x^\alpha + x^{2\alpha}},} \tag{7}$$

де $\phi(y)$ – функція хвостових параметрів $w(\xi)$ та знака y.

Густини $\mathcal{P}(y)$ можуть мати один або два ***важких*** хвоста, або бути одно- чи двосторонніми ***експоненціальними*** розподілами.

При великих значеннях t в центральній області $|x| \propto O[1/a(t)]$ маємо $P(x,t) \sim a(t)\mathcal{P}[a(t)x]$ (режим ***типових*** флуктуацій).

У області $|x| \gg O[1/a(t)]$ – режим ***рідкісних*** флуктуацій і розподіли $P(x,t)$ завжди мають один або два ***важких*** хвоста, що пропорційні $|x|^{-1-\alpha}$.

Таким чином, маємо

$$\boxed{\sigma_X^2(t) = \infty \text{ при } \forall\, t,\ P(x,\nu t) \sim P(x,t) \text{ при } t \to \infty \text{ і } \forall \nu > 0.} \tag{8}$$

Процес $X(t)$ – ***надповільні польоти Леві***.

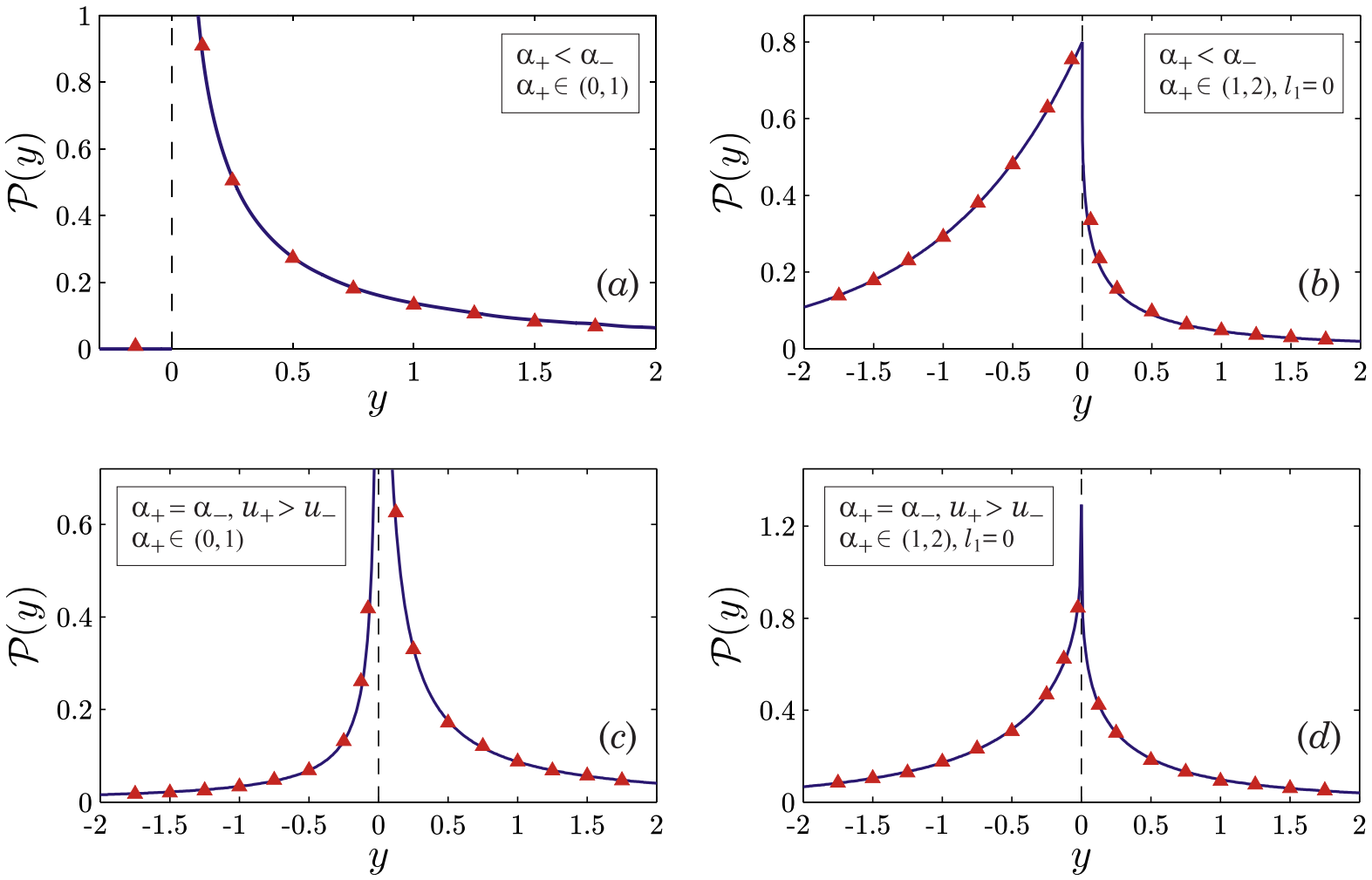


Рис. 3. Типовий вигляд неекспоненціальних граничних густин $\mathcal{P}(y)$ при різних значеннях параметрів розподілів $w(\xi)$. Суцільні лінії – точні аналітичні залежності, а маркери – результати числового моделювання.

Дихотомічний процес $f(t)$ приймає два стани ± 1, часи перебування в яких $\{\tau_n\}$ є випадковими величини, що мають густини ймовірності $p^{\pm}(\tau)$.

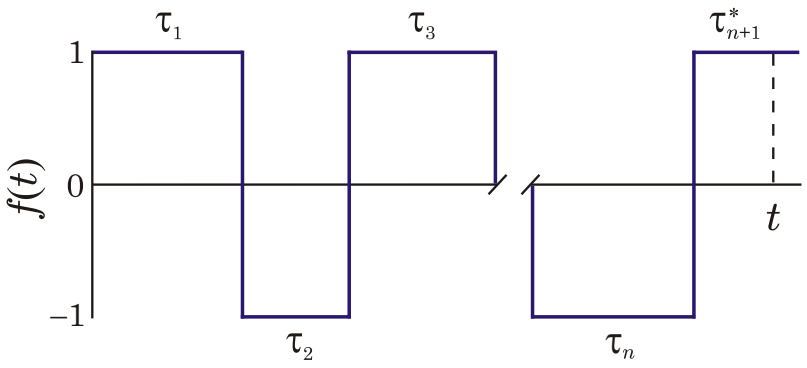


Рис. 4. Схема процесу $f(t)$.

Закон релаксації для процесу $f(t)$

$$\mu(t) = \langle f(t) \rangle = \mathsf{Pr}\{f(t) = +1\} - \mathsf{Pr}\{f(t) = -1\}. \tag{9}$$

Тут $\langle \cdot \rangle$ – усереднення по реалізаціям і $\mathsf{Pr}\{\cdot\}$ – ймовірність події в дужках.

Релаксаційне рівняння у просторі Лапласа

$$\boxed{\mu_s = \frac{\phi_s^+ - \phi_s^- + \phi_s^+ \phi_s^-}{s(\phi_s^+ + \phi_s^- - \phi_s^+ \phi_s^-)},} \tag{10}$$

де $\phi_s^{\pm} = 1 - p_s^{\pm}$.

3. Релаксаційні процеси в дворівневих системах

Для ***важких*** густин $p^{\pm}(\tau) \sim q_{\pm}/\tau^{1+\alpha_{\pm}}$ $(\tau \to \infty)$, де $q_{\pm} > 0$ і $\alpha_{\pm} \in (0, 2]$, в залежності від параметрів $p^{\pm}(\tau)$ при $t \to \infty$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mu(t) \sim \mu_{\infty} - (t/T)^{-\beta}, \\ &\mu(t) \sim 1 - \ln(t)(t/T)^{-\beta}, \\ &\mu(t) \sim 1 - \eta/\ln t. \end{aligned}} \tag{11}$$

Для ***надважких*** густин $p^{\pm}(\tau) \sim \varrho_{\pm}(\tau)/\tau$ $(\tau \to \infty)$, де $\varrho_{\pm}(\tau)$ – функції, що повільно змінюються на нескінченності, маємо

$$\boxed{\mu(t) \sim 1 - 2V^{-}(t)/V^{+}(t).} \tag{12}$$

Якщо $p^{+}(\tau)$ – надважка, а $p^{-}(\tau)$ – важка густина, то

$$\boxed{\mu(t) \sim 1 - U(t)(t/T)^{-\beta}.} \tag{13}$$

Дані формули записані для ***несиметричного*** випадку $p^{+}(\tau) \gg p^{-}(\tau)$, якщо ж $p^{\pm}(\tau) = p(\tau)$, то для важких та надважких густин відповідно

$$\boxed{\mu(t) \sim (t/T)^{-\beta} \text{ та } \mu(t) \sim V(t)/2.} \tag{14}$$

Для розподілів ***Ерланга*** $p^{\pm}(\tau) = \lambda_{\pm}^2 \tau e^{-\lambda_{\pm}\tau}$ маємо

$$\boxed{\begin{aligned}\mu(t) = \frac{\lambda_- - \lambda_+}{\lambda_+ + \lambda_-}\left(1 + \frac{\lambda_+}{\lambda_-}e^{-(\lambda_+ + \lambda_-)t}\right) + \frac{\lambda_+}{\lambda_-}\Bigg[\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \\ - (\lambda_+ - 3\lambda_-)\frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\Bigg]e^{-(\lambda_+ + \lambda_-)t/2}.\end{aligned}} \tag{15}$$

Для розподілів ***Міттаг-Леффлера*** $p^{\pm}(\tau) = \tau^{\alpha_{\pm}-1}E_{\alpha_{\pm},\alpha_{\pm}}(-\tau^{\alpha_{\pm}})$ з $\alpha_{\pm} \in (0,1)$ маємо відповідно при $\alpha < \beta$ і $\alpha > \beta$ ($\alpha = \alpha_+$ і $\beta = \alpha_-$)

$$\boxed{\begin{aligned}\mu(t) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-t^{\alpha})^n E^n_{\beta,\alpha n+1}(-t^{\beta}), \\ \mu(t) &= 1 + 2t^{\alpha-\beta}\sum_{n=1}^{\infty}(-t^{\beta})^n E^n_{\alpha,\beta n+(\alpha-\beta)+1}(-t^{\alpha}).\end{aligned}} \tag{16}$$

Для розподілу ***Леві*** $p(\tau) = L^{-1}\{e^{-s^{\alpha}}\} = l_{\alpha}(\tau)$ з $\alpha \in (0,1)$ знаходимо

$$\boxed{\mu(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \Phi_{\alpha}\left(n^{-1/\alpha}t\right),} \tag{17}$$

де введено функцію $\Phi_{\alpha}(t) = \int_0^t d\tau\, l_{\alpha}(\tau)$.

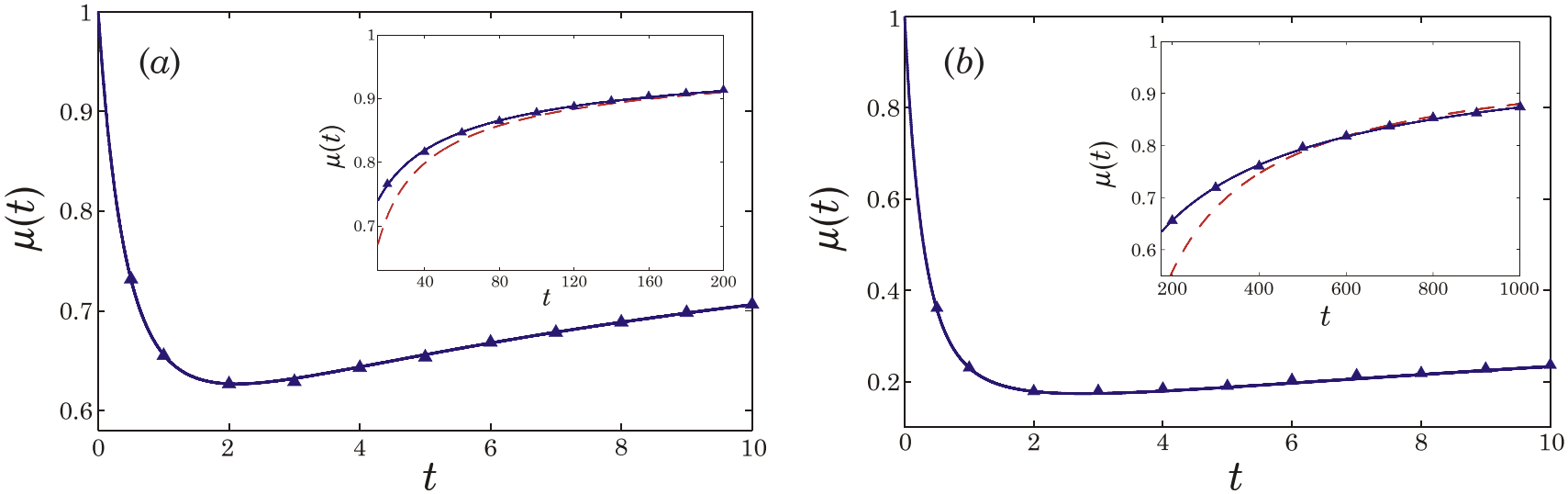


Рис. 5. Поведінка аномальних законів релаксації. Панель (a) – $\alpha_+ = 0.5$ і $\alpha_- = 1.5$, панель (b) – $p^+(\tau)$ має надважкий хвіст і $\alpha_- = 1.5$.

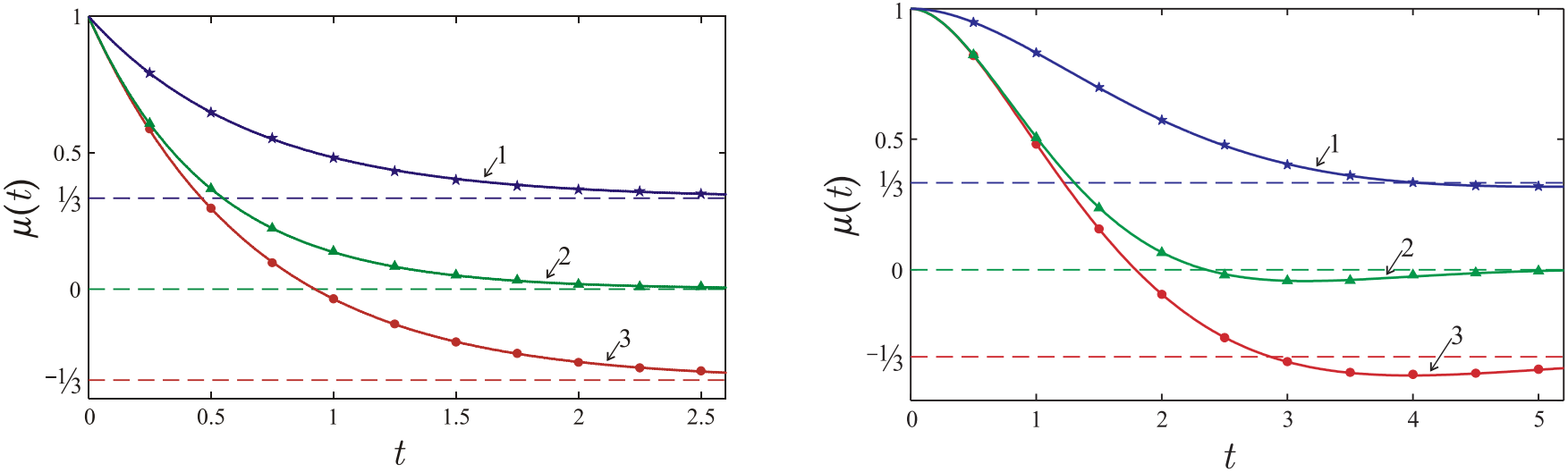


Рис. 6. Релаксація Дебая (зліва) та Ерланга (справа). Параметри: (1) $\lambda_+ = 0.5$, $\lambda_- = 1$; (2) $\lambda_\pm = 1$; (3) $\lambda_+ = 1$, $\lambda_- = 0.5$.

Висновки

- Вперше досліджено процес надповільних польотів Леві, що характеризуються важкими хвостами розподілу довжин стрибків випадкових блукань та надважкими хвостами розподілу часів очікування між ними. Знайдено та проведено повну класифікацію граничних густин ймовірності та відповідних їм масштабуючих функцій часу в залежності від параметрів зазначених розподілів.

- Отримано ряд альтернативних представлення граничних густин ймовірності для масштабованих польотів Леві. За їх допомогою детально досліджено асимптотичну у часі поведінку отриманих граничних густин ймовірності. Крім того, проведено числове моделювання випадкових блукань, що підтвердило існування усіх типів граничних густин, передбачених теоретично.

Висновки (продовження)

- Побудовано модель релаксаційних процесів у дворівневих системах, структурні елементи яких еволюціонують незалежно один від одного у відповідності з дихотомічним процесом. Отримано інтегральне рівняння, що описує релаксацію в таких системах. За його допомогою вперше визначено та класифіковано аномальні асимптотичні закони релаксації для даних систем при наявності важких та/або надважких розподілів часів перебування системи в дозволених станах.

- Знайдено точні закони релаксації у дворівневих системах, для яких час перебування їх структурних елементів у "верхньому" та "нижньому" станах характеризується (1) експоненціальними розподілами, (2) розподілами Ерланга, (3) розподілами Міттаг-Леффлера та (4) односторонніми розподілами Леві. Усі закони релаксації дворівневих систем, як точні, так і асимптотичні, підтверджені шляхом числового моделювання.

Наукові праці з основними науковими результатами

- S.I. Denisov, S.B. Yuste, Yu.S. **Bystrik**, H. Kantz, and K. Lindenberg. Asymptotic solutions of decoupled continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting time and heavy-tailed jump length distributions. ***Phys. Rev. E***, **84**, 061143 (2011).
- S.I. Denisov, **Yu.S. Bystrik**, H. Kantz. Asymptotic solutions of decoupled continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting time and heavy-tailed jump length // Proceedings of The 2nd Internetional Conference "Nanomaterials: Applications and Properties" (Alushta, 17-22 Sept. 2012). – Sumy, 2012. – Vol. 1, № 4. – P. 04MFPN17 (4pp).
- S.I. Denisov, **Yu.S. Bystrik**, and H. Kantz. Limiting distributions of continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting times. ***Phys. Rev. E***, **87**, 022117 (2013).
- S.I. Denisov, **Yu.S. Bystrik**. Continuous-time Random Walk Model of Relaxation of Two-state Systems. ***Acta. Phys. Pol. B***, **46**, 931 (2015).
- **Ю.С. Быстрик**, Л.А. Денисова. Аномальные релаксационные процессы в двухуровневых системах. ***J. Nano-Electron. Phys.***, **7**, №3, 03049 (2015).

Наукові праці з основними науковими результатами (продовження)

- Lyutyy T.V. Rotational properties of ferromagnetic nanoparticles driven by a precessing magnetic field in a viscous fluid / T.V. Lyutyy, S.I. Denisov, V.V. Reva, **Yu.S. Bystrik** // Phys. Rev. E. – 2015. – Vol. 92, № 4. – P. 042312 (10 pp).
- **Ю.С. Быстрик**. Численное исследование законов сверхмедленной диффузии для определенного класса непрерывных во времени случайных блужданий. ***J. Nano-Electron. Phys.***, **8**, №1, 01044 (2016).
- S.I. Denisov, **Yu.S. Bystrik**. Statistics of bounded processes driven by Poisson white noise. ***Phys. A***, **515**, 38–46 (2019).
- S.I. Denisov, **Yu.S. Bystrik**. Exact stationary solutions of the Kolmogorov-Feller equation in a bounded domain. ***Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.***, **74**, 248–259 (2019).

Дякую за увагу!