Київський національний університет імені Тараса Шевченка

**Шевченко Георгій Михайлович**

кандидат фізико-математичних наук,

докторант механіко-математичного факультету

Київського національного університету імені Тараса Шевченка

**СТОХАСТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ МОДЕЛЕЙ**

**І ЇХНІ ЗАСТОСУВАННЯ**

Реферат до роботи

на отримання **премії Президента України**

для молодих учених

Київ – 2012

**Мета роботи** – побудова математичних моделей складних фізичних, біологічних, фінансових явищ, які містять випадковість, дослідження властивостей цих моделей, розробка методів наближеного аналізування випадкових процесів та розв’язання актуальних задач фінансового аналізу за допомогою розроблених методів.

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає у наступному:

- для стохастичних диференціальних рівнянь у гільбертовому просторі побудовано дискретні апроксимації за схемами Ейлера та Мільштейна та досліджено швидкість збіжності цих апроксимацій;

- для нескінченновимірних рівнянь з необмеженим зсувом побудовано апроксимації розв'язками рівнянь з регулярними коефіцієнтами;

- для упереджуючих стохастичних диференціальних рівнянь з інтегралом Скорохода доведено існування приблизних розв'язків та збіжність апроксимацій з дискретним часом для квазілінійних рівнянь;

- для розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з дробовим броунівським рухом одержано результати про стохастичну диференційованість та збіжність дискретних апроксимацій і апроксимацій розв’язками звичайних диференціальних рівнянь з випадковими коефіцієнтами;

- для моделювання суттєво неоднорідних процесів з довгою залежністю визначено мультидробові процеси та досліджено їхні властивості;

- розв'язано задачу оптимального обміну одного фінансового активу на інший протягом скінченного проміжку часу;

- досліджено задачу оптимальної реалізації американського опціона в моделі зі стрибками;

- отримано точні оцінки близькості цін бар'єрних опціонів в дискретній та неперервній моделях;

- доведено відсутність арбітражу при перепродажі Європейського опціона і встановлено фундаментальну теорему в моделі з податком на капітал портфеля.

**Практична цінність роботи.** Багато фізичних, біологічних, хімічних, економічних, фінансових процесів і систем керуються великою кількістю випадкових та детермінованих факторів. Для моделювання таких процесів і систем використовують випадкові процеси і стохастичні диференціальні рівняння. Наявні математичні моделі часто не можуть відтворити такі суттєві характеристики модельованих об’єктів як просторова та часова неоднорідність, довгострокова та довгодіюча залежність, упереджувальна залежність, анізотропність тощо. В роботі, що подається на премію, розроблено нові математичні моделі з такими характеристиками, проаналізовано їх, побудовано методи наближеного аналізу для подальшого впровадження на практиці. За допомогою розроблених в роботі методів розв’язано декілька прикладних задач оптимального інвестування, які виникають у фінансовому менеджменті. Тому робота є актуальним дослідженням, яке відкриває нові шляхи використання інноваційних наукомістких технологій в економіці.

**Публікації.** Результати, наведені в роботі, опубліковано в 35 публікаціях, з них основні висвітлено в монографії, двох начальних посібниках з грифом МОН України, 4 статтях у провідних міжнародних виданнях та 19 статтях в українських журналах, включених до переліку фахових видань ВАК України.

**ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ**

**Розділ 1. Наближені методи розв’язування нескінченновимірних стохастичних диференціальних рівнянь.**

У даному розділі досліджуються стохастичні диференціальні рівняння у нескінченновимірному просторі з початковою умовою

(1)

де , – неперервні функції, які задовольняють умову Ліпшиця та лінійного росту, – лінійний, взагалі кажучи, необмежений оператор на , – циліндричний вінерівський процес. Подібні рівняння дуже широко застосовуються: по-перше, вони дозволяють моделювати системи з великою кількістю ступенів вільності та взаємодію значної кількості частинок або агентів, по-друге, окремим випадком такого рівняння є стохастичне диференціальне рівняння у частинних похідних, подібні рівняння застосовуються для дослідженні фізичних процесів теплопровідності та розповсюдження хвиль, при моделюванні турбулентних потоків, у фінансовій оптимізації, тощо.

Рівняння (1) зазвичай не можна точна розв’язати, тоді в нагоді стають наближені методи. Найпоширеніші методи розв’язання звичайних стохастичних диференціальних рівнянь базуються на дискретизації часу. Проте безпосереднє застосування даних методів до рівняння (1) призводить до схем, які, взагалі кажучи, є не тільки розбіжними, а й навіть некоректно визначеними. Для того, щоб застосувати ці методи до рівняння (1), використовується поняття м’якого розв’язку рівняння (1): якщо припустити, що сім’я операторів породжує сильно неперервну двопараметричну сім’ю операторів , то будь-який сильний розв’язок рівняння (1) є м’яким розв’язком, тобто розв’язком рівняння

(2)

Дискретизація часу в рівнянні (2) веде до збіжних апроксимаційних схем. У роботі розглянуто навіть більш загальне рівняння, ніж (2), а саме: стохастичне рівняння типу Вольтерри і розроблено методи його наближеного розв’язування. Тим не менш, основний інтерес представляють рівняння типу (1). Для них доведено низку результатів, ключовими є наступні:

**Теорема 1.** *Якщо – розв’язок рівняння* (1)*, а – його апроксимації за схемою Ейлера, то має місце оцінка*

**Теорема 2.** *Якщо – розв’язок рівняння* (1)*, а – його апроксимації за схемою Ейлера, то має місце оцінка*

Одержані оцінки для порядку збіжності дискретних апроксимацій є такими самими, як і для звичайних стохастичних диференціальних рівнянь, і дозволяють оцінити шаг дискретизації часу, необхідний для отримання заданої точності апроксимацій.

Інші види апроксимацій, що розглядаються, включають скінченновимірні апроксимації, апроксимацій розв’язками рівнянь з регулярними коефіцієнтами, апроксимації методом splitting-up (розбиття). Для таких апроксимацій доведено їх збіжність та одержано оцінки швидкості збіжності.

**Розділ 2. Стохастичні диференціальні рівняння з упередженням.**

В цьому розділі розглядається звичайне одновимірне стохастичне диференціальне рівняння, кероване вінерівським процесом

(3)

в якому начальне значення та/або коефіцієнти містять інформацію про майбутню еволюцію процесу , тому дане рівняння є рівнянням з упередженням. З цієї причини у рівнянні (3) потрібно розглядати не звичайний, а розширений стохастичний інтеграл, тобто інтеграл Скорохода. Для цього інтегралу не працюють методи, застосовні для звичайного стохастичного інтегралу Іто, тому, зокрема, розв’язність такого рівняння доведено лише в незначній кількості випадків. В даній роботі за вельми слабких умов на коефіцієнти (фактично, лише лінійне зростання та вимірність) доведено існування приблизного розв’язку рівняння (3), тобто такого процесу , що

(3)

з нормою, що є природною в контексті аналізу на просторі білого гаусівського шуму (фактично, це норма у спряженому просторі Соболєва).

У випадку, коли рівняння (3) є квазілінійним, тобто має вигляд

(4)

побудовано апроксимації з дискретним часом та доведено оцінку порядку збіжності

яка узгоджується з відповідними результатами для рівнянь без упередження.

**Розділ 3. Стохастичний аналіз дробових та мультидробових процесів.**

У даному розділі досліджуються моделі, які містять дробові або мультидробові процеси. Дробові процеси є стандартним інструментом при моделюванні явища довгострокової залежності при вивченні процесів у комп'ютерних мережах, на фінансових ринках, а також у гідромеханіці, кліматології та гідрографії та інших прикладних галузях.

Найпопулярнішим в дослідженням дробовим процесом є дробовий броунівський рух , що є за означенням центрованим гаусівським процесом з коваріаційною функцією

де параметр Хюрста є мірою залежності процесу, при дробовий броунівський рух має властивість довгострокової залежності. Саме цей випадок розглянуто в роботі, оскільки він представляє найбільший інтерес для застосувань, зокрема, у фінансовому моделюванні.

Дробовий броунівський рух в моделях застосовується найчастіше в якості випадкового рушія стохастичного диференціального рівняння.

В загальному вигляді стохастичне диференціальне рівняння, кероване дробовим броунівським рухом, має вигляд

(5)

Аналіз такого рівняння є значно складнішим у порівнянні з аналізом звичайного стохастичного диференціального рівняння, керованого вінерівським процесом, оскільки дробовий броунівський рух не є марківским процесом, тобто його майбутня поведінка залежить від усіх попередніх значень процесу, а не лише від поточного положення. Тому надзвичайно корисними є методи наближеного розв’язання такого рівняння. В роботі розглянуто апроксимації розв’язків рівняння (5) двох типів: апроксимації за допомогою дискретизації часу та апроксимації розв’язками звичайних диференціальних рівнянь з випадковими коефіцієнтами.

Основними результатами щодо дискретних апроксимацій рівняння (5) є наступні.

**Теорема 1.** *Якщо – розв’язок рівняння* (5)*, а – його апроксимації за схемою Ейлера з кроком , то для будь-якого має місце оцінка*

*Більше того, аналогічна оцінка має місце і для дробової норми Бєсова різниці процесів.*

Для квазілінійного рівняння з інтегралом Скорохода

(6)

одержано кращий порядок збіжності.

**Теорема 2.** *Якщо – розв’язок рівняння* (6)*, а – його дискретні апроксимації, то має місце оцінка*

Для апроксимацій розв’язками звичайних диференціальних рівнянь доведено збіжність за ймовірністю в просторі Бєсова. Розглянуто конкретні приклади апроксимацій, що дозволяє розробити дієві алгоритми наближеного розв’язання рівняння (5).

Коли властивості модельованого процесу суттєво змінюються при зміні часу або масштабу, дробові процеси, зокрема, дробовий броунівський рух, не можуть адекватно відтворити поведінку процесу. В таких випадках набагато кращою моделлю є мультидробовий процес.

В роботі визначено мультидробовий броунівський рух типу Вольтерра та мультидробовий процес Розенблата.

Для мультидробового броунівського руху типу Вольтерра, який узагальнює дробовий броунівський рух, встановлено такі його ключові властивості, як неперервність, гельдеровість, локалізованість. Доведено однозначну розв’язність стохастичних диференціальних рівнянь, керованих мультидробовим броунівським рухом. Як і для дробового броунівського руху, в роботі побудовано абсолютно неперервні наближення мултидробового броунівського руху, а за допомогою цих наближень розроблено метод апроксимації розв’язку рівняння, керованого мультидробовим процесом, розв’язками звичайних диференціальних рівнянь з випадковими коефіцієнтами.

По-друге, визначено мультидробовий процес Розенблата, який є кращою моделлю у випадках, коли хвости розподілу процесу є важчими за гаусові. Останню властивість, зокрема, мають фінансові інструментів з середньою та низькою ліквідністю, до яких належить переважна більшість акцій українських підприємств. Для мультидробового процесу Розенблата проведено поглиблений аналіз локальних властивостей, зокрема, доведено існування локального часу.

**Розділ 4. Застосування у фінансовому моделюванні та інвестуванні.**

Розроблений у роботі математичний апарат застосовано до розв’язку декількох задач фінансового модулювання, оптимального інвестування, оцінювання і хеджування платіжних зобов’язань.

Розв’язана задача оптимального обміну одного фінансового активу на інший протягом скінченного проміжку часу дозволяє інвестору визначати найкращий час для виконання ф’ючерсного контракту, внесення змін у портфель інвестицій, доставки фінансового активу тощо. Доведено порогову структуру області оптимального обміну та отримано асимптотичну розклад границі області, що дає готові алгоритми для для наближеної побудови області оптимального обміну.

Розроблені в роботі методи наближеного оцінювання бар’єрних опціонів можуть бути використаними для підвищення ліквідності подібних екзотичних фінансових інструментів. Отримані оцінки різниці цін дозволяють визначити параметри схеми наближеного оцінювання, оптимальні з погляду досягнутої точності на одиницю затраченого часу.

Встановлені фундаментальні теореми щодо арбітражу в задачі перепродажу Європейського опціона та в моделі ринку з податком, пропорційним до величини капіталу портфеля, обґрунтовують коректність побудованих моделей та відкривають шляхи для подальших досліджень у даних моделях.

Доведені граничні теореми для цін та стратегій у моделях фінансового ринку зі стрибками дозволяють звести зазвичай нерозв’язні задачі оцінювання й хеджування платіжних зобов’язань в таких моделях до більш простих задач, які піддаються аналізу.

**ВИСНОВКИ**

В роботі запропоновано нові математичні моделі, які можуть бути застосовані при моделюванні та тонкому аналізі явищ, керованих великою кількістю випадкових факторів. Встановлено низку теоретичних результатів та розроблено математичний апарат, необхідний для аналізування цих моделей. Побудовано алгоритми точного та наближеного розв’язання найпоширеніших задач, які виникають на практиці. За допомогою розроблених методів розв’язано низку практичних задач щодо інвестування на фінансових ринках.

Автор Шевченко Г.М.

Декан

механіко-математичного факультету М.Ф.Городній