

# Польова електронна емісія: вплив магнітного поля та релятивістських ефектів

С. О. Лебединський

Представлення матеріалів  
роботи на здобуття премії  
Президента України для молодих учених

Суми - 2022

- Описання польової емісії, що відбувається за екстремально великих напруженостей електричного поля (сучасні прискорювачі, нейтронні зірки та ін.) за допомогою теорії Фаулера-Нордгейма (1928 р.).
- Розробка компактного лінійного електрон-позитронного прискорювача CLIC (Compact Linear Collider) на енергіях близько 3 ТеВ з напруженістю електричних полів більше за 100 МВ/м.
- Теорія польової емісії в присутності магнітного поля створена лише для випадку паралельності електричного та магнітного полів.
- Існуючі теорії не враховують релятивізму та впливу магнітного поля, паралельного поверхні металу.

## Мета і завдання

**Метою роботи** є побудова релятивістської теорії польової емісії електронів із металів у присутності зовнішнього магнітного поля.

### Завдання:

- визначення руху електрона у міжелектродному проміжку при довільній конфігурації електричного та магнітного полів;
- релятивістське узагальнення теорії польової емісії електронів з металу;
- вивчення впливу зовнішнього магнітного поля, паралельного поверхні металу, на протікання польової емісії електронів;
- встановлення залежності протікання передпробійних процесів у міжелектродному проміжку від магнітного, поля паралельного поверхні металу;
- пояснення експериментів ЦЕРН та Інституту прикладної фізики НАН України з вивчення електростатичних високовакуумних пробоїв, де невелике магнітне поле зменшує градієнтну стійкість.

**Методи дослідження:** математичний апарат квантової механіки та квантової електродинаміки. Процес польової емісії електронів розглядається в рамках підходу Фаулера-Нордгейма: потенціальний бар'єр на межі метал-вакуум вважається трикутним, а рух електрона одновимірним.

# Наукове та практичне значення

## Наукова новизна отриманих результатів:

- вперше виконано узагальнення теорії Фаулера-Нордгейма на релятивістський випадок і передбачено ефект релятивістського стиснення ширини потенціального бар'єру на межі метал-вакуум;
- вперше зроблено узагальнення теорії польової емісії на випадок присутності зовнішнього магнітного поля, перпендикулярного електричному, коли  $E > cB$ ;
- отримано аналітичний вираз коефіцієнту проходження потенціального бар'єру пояснено зменшення напруги пробою, що спостерігалось в експериментах з вивчення градієнтної стійкості в ІПФ НАН України та ЦЕРН.

**Практичне значення отриманих результатів.** У дослідженні пояснено експериментально отримане зменшення стійкості до пробоїв при наявності зовнішнього магнітного поля, паралельного поверхні електродів у експериментах проведених в Інституті прикладної фізики НАН України та Європейській організації з ядерних досліджень (ЦЕРН) та надано рекомендації щодо запобігання виникнення високовакуумного високоградієнтного пробою шляхом прикладення магнітного поля, більшого за відсікаюче.

# Структура циклу робіт

- ➊ Вступ
- ➋ Квантово-механічний рух електрона в електричному та магнітному полях.
- ➌ Релятивістське узагальнення теорії польової емісії.
- ➍ Дослідження впливу магнітного поля на польову емісію та інші процеси в вакуумному проміжку.
- ➋ Висновки.

# P.1. Актуальність

- Фаулер і Нордгейм (1928) та Нордгейм (1929) — запропонована та удосконалена модель, яка описує процес польової емісії електронів з металу.

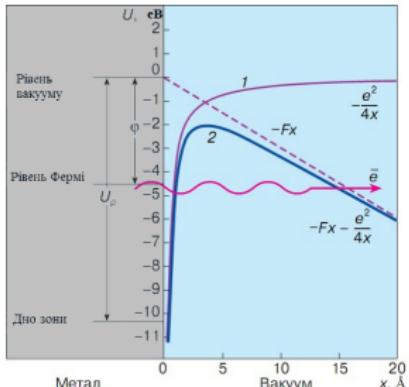


Табл.1. Основні роботи з вивчення польової емісії

Задача	Польова емісія	Пробої	Екстремальні поля
$B = 0$	Fowler, Nordheim(1928) Müller(1937)	Chatterton(1966) Alpert(1964), Фурсей(1985)	Dyke(1953), Фурсей(1998)
$\vec{B} \parallel \vec{E}$	Blatt(1963) Flood(1970)	Stratakis(2010) Фурсей(1980)	Ghosh (2012)
$\vec{B} \perp \vec{E}$		ІПФ НАН України, CLIC (2015)	

## P.2. Квантово-механічний рух електрона в $\vec{E}$ та $\vec{B}$

Конфігурація полів:  $\vec{E}(-E\sin\alpha, -E\cos\alpha, 0)$ ,  $\vec{B}(0, B, 0)$

Вихідним рівнянням є рівняння Шрьодінгера, де:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[ -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} - eBx \right)^2 \right] - eE(x\sin\alpha + y\cos\alpha) \quad (1)$$

Хвильова функція електрона:  $\tilde{\psi}(x, y) = X(x)Y(y)$

Рух вздовж  $Ox$ :

$$\frac{d^2X(\xi)}{d\xi^2} + (\tilde{\varepsilon}_x - \xi^2)X(\xi) = 0, \quad (2)$$

Рух вздовж  $Oy$ :

$$\frac{d^2Y(\eta)}{d\eta^2} - \eta Y(\eta) = 0, \quad (3)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^n n!}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_n(\xi)$$

$$\xi = \left(\frac{m\omega_B}{\hbar}\right)^{1/2} \left(x - \frac{p_z}{m\omega_B} - \frac{eE\sin\alpha}{m\omega_B^2}\right)$$

$$\psi(y) = C \operatorname{Ai}(\eta),$$

$$\eta = \left(\frac{2meE\cos\alpha}{\hbar}\right)^{1/3} \left(y - \frac{\varepsilon_y}{eE\cos\alpha}\right)$$

$\varepsilon_y$  визначає енергію, що пов'язана з рухом вздовж  $\vec{B}$ , тоді у випадку  $\vec{E} \parallel \vec{B}$ , коефіцієнт проникнення потенціального бар'єру, не залежить від  $B$ .

Хвильова функція електрона задовільняє рівнянню Клейна-Гордона:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{(\varepsilon - U_0 + eEx)^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi(x) = 0, \quad (4)$$

де  $U_0$  – висота потенціального бар'єру.

У випадку,  $\left( \frac{\phi}{mc^2} \right) \ll 1$  і  $\left( \frac{\phi^2}{e\hbar E c} \right) \sim 1$  можна знайти простий аналітичний вираз коефіцієнта проходження потенціального бар'єру:

$$D_{rel} = D_{F-N} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{5} \frac{(U_0 - W_e)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{mc^2 e E \hbar}} + \frac{\sqrt{2}}{48} \frac{(7U_0 - 12W_e)eE\hbar}{U_0 \sqrt{m}(U_0 - W_e)^{\frac{3}{2}}} + \frac{37U_0 - 79W_e + 12\frac{W_e^2}{U_0}}{120mc^2} + \frac{(49U_0^2 - 216U_0W_e + 192W_e^2)e^2 E^2 \hbar^2}{1536U_0^2 m(U_0 - W_e)^3} \right), \quad (5)$$

де  $D_{F-N}$  – коефіцієнт проходження потенціального бар'єру, отриманий Фаулером та Нордгеймом

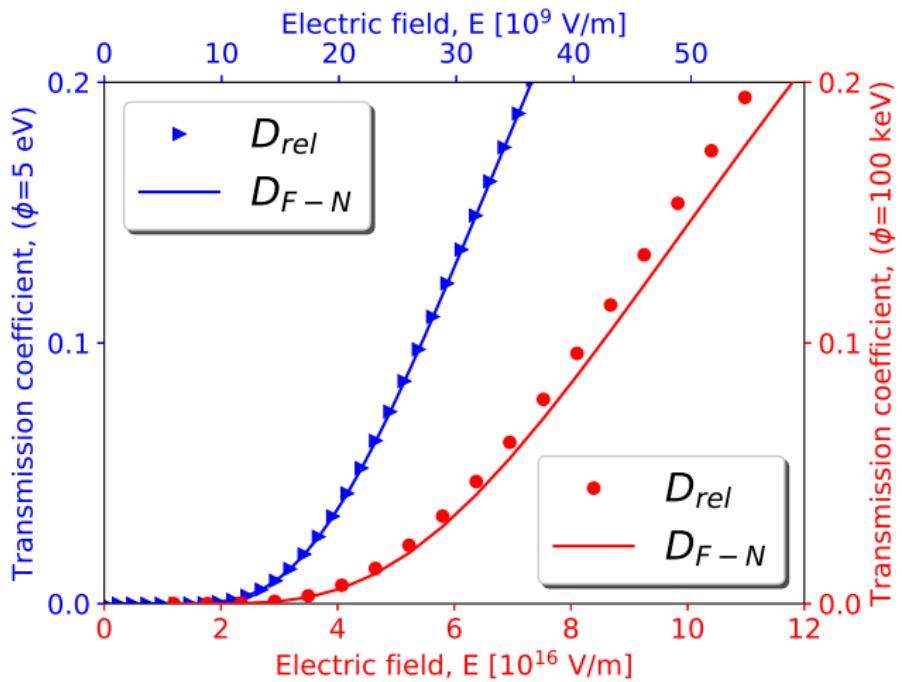


Рис. 1. Залежність величини релятивістсько-узагальненого та отриманого Фаулером і Нордгеймом коефіцієнтів проходження потенціального бар'єру від електричного поля при різних роботах виходу.

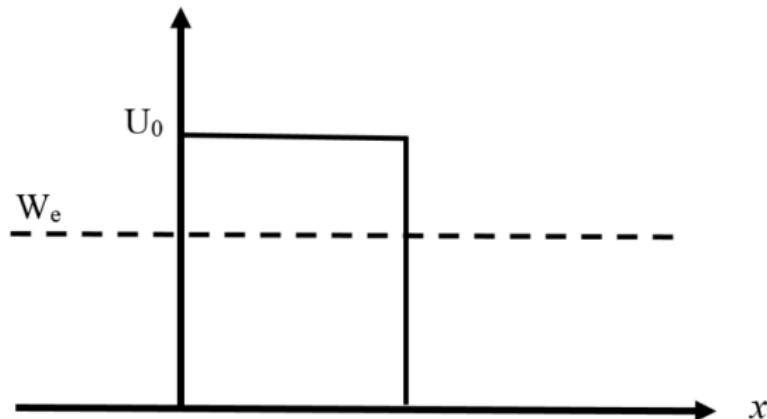


Рис.2. Потенціальний бар'єр у відсутності електричного поля.

Ширина потенціального бар'єру в релятивістському випадку

$$h_{rel} = h \sqrt{1 - V^2/c^2}, \quad (6)$$

де  $h$  – ширина бар'єру в нерелятивістському випадку і

$$V^2 = \frac{U_0 - W_e}{2m}$$

### P.3 Вплив зовнішнього магнітного поля

Коефіцієнт проходження потенціального бар'єру у присутності магнітного поля  $D_B$ , паралельного поверхні, у першому наближенні записується:

$$D_B = e^{-\frac{4\sqrt{2}\left(E^2 - 2\left(\frac{U_0 - W_e}{mc^2}\right)c^2B^2\right)\sqrt{m}(U_0 - W_e)^{\frac{3}{2}}}{3E^3\epsilon h}} \frac{4\sqrt{U_0 - W_e}(E^2 - B^2c^2)^{\frac{3}{4}}E^{\frac{3}{2}}\sqrt{W_e}}{E^3W_e + (E^2 - B^2c^2)^{\frac{3}{2}}(U_0 - W_e)} \quad (7)$$

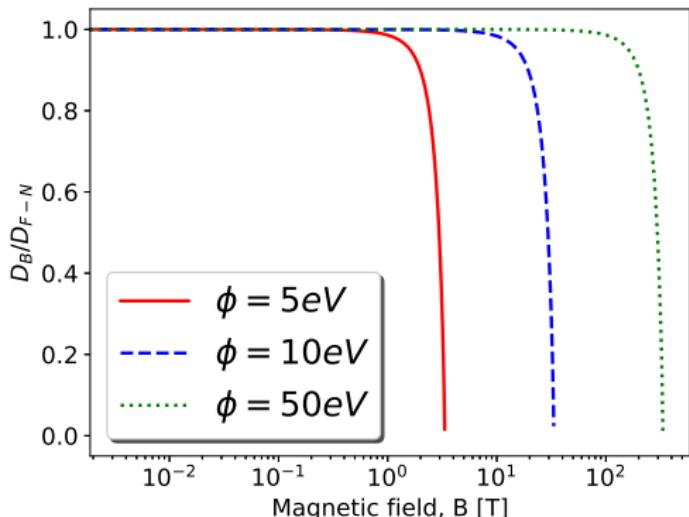


Рис. 3. Залежність коефіцієнта проходження потенціального бар'єру від величини магнітного поля для різних значень роботи виходу  $\phi$ .

## P.4 Дослідження впливу магнітного поля на польову емісію та інші процеси в вакуумному проміжку

12

Табл.2. Експерименти з вивчення впливу магнітного поля

	$E$	$B$	$d$	Результати
CERN	144 МВ/м	0,5 Тл	15 мкм	можливе зменшення стійкості
IAP NASU	200 МВ/м	0,33 Тл	100 мкм	зменшення $U_{BD}$ на 10 %

Потік нейтральних частинок у міжелектродному проміжку перед пробоєм:

$$j^{(0)} = j_{rest}^{(0)} + j_{desor}^{(0)} + j_{diff}^{(0)} + j_{T,avap}^{(0)} + j_{lon,atom}^{(0)} \quad (8)$$

Потік заряджених частинок:

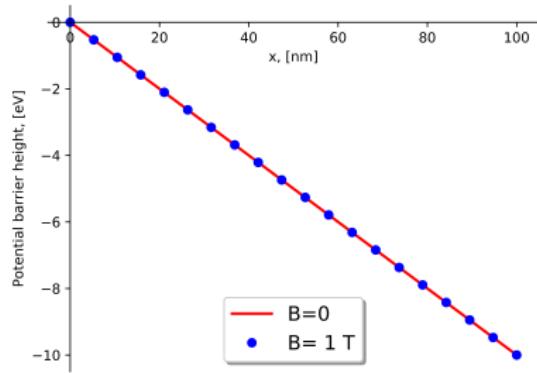
$$j_{dark} = j^{(-)} + j^{(+)} + j^{(-+)} + j^{add} \quad (9)$$

$$j^{(-)} = j_{emis,e^-}^{(-)} + j_{ion,bombar}^{(-)} + j_{emis,Me^-}^{(-)} \quad - \text{катодний струм}$$

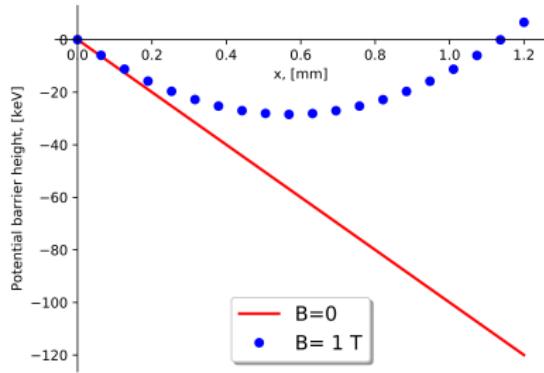
$$j^{(+)} = j_{emis,Me^+}^{(+)} + j_{e^-,bombar}^{(+)} \quad - \text{анодний струм}$$

$$j^{(-+)} = j_{e^-,Me^+}^{(-+)} + j_{e^-,gas^+}^{(-+)} \quad - \text{іонізаційний струм}$$

## P.4 Вплив зовнішнього магнітного поля



a)



б)

Рис.4. Ефективна потенціальна енергія  $V(x)$  електрона біля поверхні металу у різних масштабах: а) від  $0$  до  $6 \cdot 10^{-8} \text{ м}$ , б) від  $0$  до  $1.2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ . Лінією позначено випадок  $E = 100 \text{ МВ/м}, B = 0$ . Точками позначено  $E = 100 \text{ МВ/м}, B = 1 \text{ Тл}$

**Відсікаюче магнітне поле:**  $B_H = \sqrt{\frac{2mE}{ed} + \left(\frac{mv_0}{ed}\right)^2}$   
 (CLIC – 10.8 Тл, IAP NASU – 3.4 Тл)



Hull (1921), Lau (1993).

## P.4 Вплив зовнішнього магнітного поля

Для врахування впливу магнітного поля було використано коваріантний підхід для узагальнення виразу Фаулера-Нордгейма для струму польової емісії:

$$|\vec{j}| = AE^2 \exp\left(-b/\sqrt{E^2 - c^2 B^2}\right) \quad (10)$$

Оцінка впливу для параметрів IAP NASU:  $|\vec{j}_B| \approx j_{FN} \cdot (1 - 5 \cdot 10^{-4})$   
 $E' = \beta E$ , –ефективне значення напруженості,  $\beta$ –коєфіцієнт підсилення поля

### Зміна траекторії електронів утворених у проміжку

Відносне подовження траєкторії електрона становить:

$$\Delta l / l = v_0 \sqrt{2/h_d} \approx 0,1. \quad (11)$$

Зміни кута входження електрона у поверхню анода:

$$\theta \approx v_x / v_y = \sqrt{h_d / 2} \approx 2^\circ \quad (12)$$

Таким чином, подовження траєкторії електронів призводить до посилення струму за рахунок збільшення іонізації.

# Висновки

- 1 Розв'язана задача про квантово-механічний рух електрона в зовнішніх електричному та магнітному полях при довільному куті між ними. Знайдено енергетичний спектр електрона, що рухається в такій конфігурації полів, та пояснено фізичний зміст окремих складових цього спектру. Показано, що коефіцієнт проходження потенціального бар'єру електроном металу при паралельній орієнтації електричного та магнітного полів не залежить від величини магнітного поля. Цим самим строго доведено припущення Блатта, зроблене у його статті, про незалежність коефіцієнта проходження електроном потенціального бар'єру у випадку колінеарності електричного та магнітного полів, на той час необґрунтоване ні теоретично, ні експериментально.
- 2 Виконано узагальнення на релятивістський випадок рівняння польової емісії електронів. Знайдено загальний вираз коефіцієнта проходження потенціального бар'єру та наведено спрощену аналітичну формулу для типових лабораторних параметрів. Показано, що збільшення коефіцієнта проходження потенціального бар'єру у випадку польової емісії з металів складає 0.015%. Цю формулу можна застосувати для обчислення польової емісії з полярного регіону нейтронної зірки. У цьому випадку збільшення коефіцієнта тунелювання складе близько 15%.
- 3 Знайдено ефект релятивістського стиснення потенціального бар'єру на межі метал-вакуум. Під час зменшення ширини бар'єру збільшується коефіцієнт проходження, чим можна пояснити і отримане збільшення коефіцієнта проходження у випадку присутності електричного поля.

## Висновки

- 4 Знайдено загальний вигляд та спрощену аналітичну формулу коефіцієнта проходження потенціального бар'єру на межі метал-вакуум у випадку впливу зовнішнього магнітного поля, перпендикулярного електричному. Показано, що магнітне поле зменшить коефіцієнт проходження менше ніж на 0,015 % для типових значень електричного та магнітного полів ( $E = 100 \text{ МВ/м}$ ,  $B = 0,33 \text{ Тл}$ ), що узгоджується з раніше отриманими результатами.
- 5 Проаналізовано вплив магнітного поля, паралельного поверхні катоду, на компоненти темнового струму у процесі формування пробою в експериментах ЦЕРН та ІПФ НАН України [4]. Показано, що зовнішнє магнітне поле збільшує довжину траєкторії електрона, утвореного в міжелектродному проміжку, на 10 %. Зростання темнового струму внаслідок збільшення довжини траєкторії електрона пояснює зменшення напруги пробою в експериментах ІПФ НАН України.

# Список опублікованих робіт

- ➊ Мирошніченко В. І. Квантово-механічний рух електрона в паралельних магнітному та електричному полях / В. І. Мирошніченко, С. О. Лебединський // [Доповіді НАН України](#). – 2014. – №9. – С. 61–65.
- ➋ Мирошніченко В. І. Квантово-механічний рух електрона в схрещених однорідних електричному та магнітному полях / В. І. Мирошніченко, С. О. Лебединський // [Доповіді НАН України](#). – 2014. – №11. – С. 72–76.
- ➌ Lebedynskyi S. O. The effect of a magnetic field on the motion of electrons for the field emission process description / S. O. Lebedynskyi, V. I. Miroshnichenko, R. I. Kholodov, V. A. Baturin. // [Problems of Atomic Science and Technology](#). – 2015. – № 98. – pp. 62–66.
- ➍ Lebedynskyi S. DC vacuum breakdown in an external magnetic field / S. Lebedynskyi, O. Karpenko, R. Kholodov, V. Baturin, Ia. Profatilova, N. Shipman, W. Wuensch // [Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A](#). – 2018. – №908. – pp. 318–324.
- ➎ Lebedynskyi S. O. Relativistic correction of the field emission current in the Fowler-Nordheim formalism / S. O. Lebedynskyi, O. O. Pasko, R. I. Kholodov // [Journal of nano- and electronic physics](#). – 2019. – №2. – pp. 02022-1 –02022-6.
- ➏ Lebedynskyi S. Field emission with relativistic effects in a magnetic field /S. Lebedynskyi, R. Kholodov // [European Physical Journal D](#). – 2019. – № 73 – pp. 190-1–190-5.

# Апробація матеріалів дослідження

- ➊ Лебединський С.О. Рух електрона у паралельних магнітному та електричному полях . – СПЕТФ'2014. – Суми, Україна, 2014. – С. 41-43.
- ➋ Lebedynskyi S. O., Miroshnichenko V. I. Quantum-mechanical movement of the electron in electric and magnetic fields // Trans-European School of High Energy Physics – TESHEP'2014, 17-24 July 2014: proceeding. – Basivka, Lviv Region, Ukraine, 2014. – P. 117-119.
- ➌ Лебединський С.О. Потенціальний бар'єр на межі метал-вакуум при наявності схрещених електричного та магнітного полів СПЕТФ+МНФ'2015, 15-16 квітня 2015: тези – Суми, Україна, 2015. – С. 58-60.
- ➍ Lebedynskyi S.O. Decreasing of the field emission current by the external magnetic field – СПЕТФ+МНФ'2016, 13-14 квітня 2016: тези – Суми, Україна, 2016. – С. 127-129.
- ➎ Лебединський С.О. Релятивістська поправка до струму польової емісії електронів/ С. О. Лебединський // Матеріали XVI Конференції з фізики високих енергій, ядерної фізики і прискорювачів, 20-23 березня 2018 р.: тези. – Харків, Україна, 2018. – С.86 .
- ➏ Lebedynskyi S.O. Relativistic correction to the field electron emission current – СПЕТФ+МНФ'2018, 24-25 квітня 2018: тези – Суми, Україна, 2018. – С. 77-78.
- ➐ Лебединський С.О. Релятивістський підхід до тунелювання електронів з конструкційних матеріалів прискорювачів/ С. О. Лебединський, Р. І. Холодов // Матеріали XVII Конференції з фізики високих енергій, ядерної фізики і прискорювачів, 26-29 березня 2019 р.: тези. – Харків, Україна, 2019. – С.87 .
- ➑ Лебединський С.О. Вплив зовнішнього магнітного поля на польову електронну емісію– СПЕТФ+МНФ'2019, 23-24 квітня 2019: тези – Суми, Україна, 2019. – С. 42-43.
- ➒ Lebedynskyi S. Field electron emission in an external magnetic field parallel to the surface / S.O. Lebedynskyi // 8th International Workshop on Mechanisms of Vacuum Arcs, MeVArc'2019. – Padova. Italy. September 16-19, 2019. – P. 26.

Дякую за увагу!