

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

**ТЕРМОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА
КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ
ТІЛ ЗА СКЛАДНОГО ТЕРМОСИЛОВОГО
НАВАНТАЖЕННЯ**
(цикл наукових праць)

БУРИК Олександр Олександрович, математик 1-ї категорії відділу теорії фізико-механічних полів Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

ГОРУН Олег Павлович, кандидат фізико-математичних наук, молодший науковий співробітник відділу термомеханіки Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Львів – 2018

Зв'язок роботи з науковими програмами

- «Розробка математичних моделей кількісного опису та оптимізації механодифузійних процесів в електропровідних тілах з метою підвищення ефективності термообробки та продовження експлуатації енергетичного обладнання» (№ держреєстрації 0111U008861);
- «Аналітично-числові методи в математичних моделях механіки зв'язаних полів стосовно окремих технічних і медичних проблем» (№ держреєстрації 0111U009687);
- «Дослідження проблем керування тепловими і термопружними полями в композитних конструкціях» (№ держреєстрації 0115U002935);
- «Математичне моделювання та аналітично-чисельне визначення теплового і напруженого станів з урахуванням неоднорідностей їх структури» (№ держреєстрації 0110U004821);
- «Розробка методики дослідження та оптимізації напруженого стану тіл з метою опрацювання раціональних режимів обробки та експлуатації елементів енергетичного обладнання та технічних пристроїв» (№ держреєстрації 0115U003056);
- «Розробка програмного комплексу дослідження напружено-деформованого стану неоднорідних і багатшарових тіл стосовно проектування мікроелектродних систем» (№ держреєстрації 0114U005082);
- «Моделювання та розроблення методів розрахунку напружено-деформованого стану структурно-неоднорідних тіл за дії теплових та силових чинників» (№ держреєстрації 0112U007254);
- В рамках договору між ДП КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля та ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України «Розробка методики розрахунку міцності деталей із вуглець-вуглецевих матеріалів сопел ракетних двигунів твердого палива за інтенсивного термосилового навантаження з урахуванням просторової структури матеріалу» - згідно з планом робіт сумісної науково-технічної діяльності ДП КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля і наукових організацій НАН України на 2015 рік 39.8512.079 П від 12.01.2015 р. та відповідно до договору № 331 від 25 червня 2014 р. між НВО «Термоприлад» ім. В. Лаха та ІППММ ім. Я.С. Підстригача «Розрахунок захисних гільз на міцність за умов стаціонарної експлуатації»

Наукова та практична значимість циклу праць. Розроблена методика і відповідне програмне забезпечення передано ДП КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля для використання при проектуванні елементів вуглець-вуглецевих сопел ракетних двигунів твердого палива та використані на ПАТ НВО «Термоприлад» ім. В. Лаха при оцінці міцності та експлуатаційного ресурсу захисних оболонок різних типорозмірів за умов гідравлічних випробувань та експлуатації.

Наукові й практичні результати праць використані також у відділі фізичних основ руйнування та міцності матеріалів в агресивних середовищах Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка Національної академії наук України при вирішенні науково-технічних задач оцінювання працездатності та ризику руйнування трубопроводів теплоенергетичного призначення та прогнозування можливих експлуатаційних пошкоджень у тришаровому металевому матеріалі, який застосовується при виготовленні корпусів енергетичних та хімічних реакторів.

Розвинута в працях методика дає змогу вивчити вплив фізико-механічних і геометричних характеристик різних структурних складових на температурні поля, напруження та переміщення і прогнозувати термомеханічну поведінку термочутливих структурно-неоднорідних елементів конструкцій, які зазнають інтенсивних силових та теплових, зокрема високотемпературних, навантажень. Отримані аналітичні розв'язки нелінійних задач теплопровідності можуть бути використані як тестові при розробленні числових методів розв'язування таких задач. Окремі результати роботи можуть бути покладені в основу методик розрахунку термомеханічної поведінки елементів конструкцій з функціонально-градієнтними покриттями та з'єднаннями.

Метою циклу є розробка методики визначення та дослідження параметрів термомеханічного стану конструкцій складної геометричної форми та просторової структури матеріалів за дії інтенсивного термосилового навантаження з урахуванням термочутливості матеріалів і нелінійного характеру деформування, а також розробка методики визначення та дослідження нестационарних температурних полів та зумовлених ними квазістатичних напружень і переміщень у плоскошаруватих термочутливих тілах, зокрема з окремими тонкими шарами, без та з урахуванням теплового випромінювання з використанням функції Гріна лінійної нестационарної задачі теплопровідності у вигляді функціональних рядів

Наукова новизна

- 1) побудовано з використанням методу скінченних елементів і однокрокових багатопараметричних різницевих алгоритмів методику визначення і дослідження термомеханічного стану структурно-неоднорідних анізотропних тіл складної геометричної форми за дії високоградієнтних нестационарних температурних полів та інтенсивного силового навантаження з урахуванням температурної залежності теплофізичних і фізико-механічних характеристик від температури та пружно-пластичного характеру деформування;
- 2) вперше до розв'язання квазістатичних задач термопружності для трискладових термочутливих тіл запропоновано методику, яка передбачає використання функції Гріна лінійної нестационарної задачі теплопровідності у вигляді функціональних рядів; отримано нові інтегральні подання розв'язків відповідних задач;
- 3) знайдено розв'язки квазістатичних задач термопружності для трискладових тіл з температурнозалежними та сталими фізико-механічними характеристиками за різної теплової дії, зокрема, з урахуванням конвективно-променевого теплообміну;
- 4) отримано розв'язки важливих класів задач про визначення та дослідження термомеханічної поведінки елементів конструкцій під час пожежі та встановлені чинники, які впливають на оцінку вогнетривкості конструкцій;
- 5) досліджено напружено-деформований стан захисних оболонок термоелектричних перетворювачів різних типорозмірів, які захищають чутливий елемент від інтенсивних силових навантажень і руйнівного впливу вимірювального середовища підвищеної температури.

1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ТІЛАХ СКЛАДНОЇ ФОРМИ І СТРУКТУРИ ЗА ІНТЕНСИВНИХ ТЕРМОСИЛОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ

- Об'єктом дослідження є термочутливі, здатні до пружно-пластичного деформування тіла складної геометричної форми та структури.
- Предметом дослідження є зумовлена дією інтенсивного термосилового навантаження термомеханічна поведінка структурно-неоднорідних, термочутливих, здатних до пружно-пластичного деформування, твердих тіл.

Математична модель для визначення розподілу температури містить

У такому наближенні задачу про визначення температурних і механічних полів у розглядуваному тілі за дії силового і температурного навантаження формуємо за два етапи. На першому записуємо рівняння теплопровідності і відповідні умови теплообміну між тілом та довкіллям. На другому етапі для визначення компонент вектора переміщень і тензорів деформацій та напружень в тілі записуємо вихідні співвідношення неізотермічної термопружно-пластичності; температурні поля для яких є вхідними.

- рівняння теплопровідності

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + Q, \quad (x_1, x_2, x_3) \in V, \quad t \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

- за початкових та крайових умов

$$T(x_1, x_2, x_3, 0) = T_0(x_1, x_2, x_3), \quad (1.2)$$

$$-\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i = \beta(T - T_S) + q, \quad (x_1, x_2, x_3) \in S, \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

Задаючи узагальнений коефіцієнт тепловіддачі у вигляді

$$\beta(x_1, x_2, x_3, T) = \beta'(x_1, x_2, x_3, T) + \lambda \sigma_0 (T^3 + T^2 T_S + T T_S^2 + T_S^3) \quad (1.4)$$

можна врахувати теплообмін між тілом і довкіллям через випромінювання.

На межі підобластей тіла V_k та V_l з різними характеристиками задаємо умови:

$$T_k(x_1, x_2, x_3, t) = T_l(x_1, x_2, x_3, t); \quad (1.5)$$

$$\left(-\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i \right)_k = \left(-\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i \right)_l, \forall (x_1, x_2, x_3) \in S_{kl}, t \geq 0 \quad (1.6)$$

Для опису напружено-деформованого стану тіла використаємо співвідношення неізотермічного термопружно-пластичного течіння у квазістатичному наближенні.

• Критерій виникнення пластичних деформацій

$$\Phi(\sigma_{ij} - o_{ij}) = K^2 \left(\int d\bar{\varepsilon}_p, T \right); \quad (1.7)$$

• Прирости напружень:

$$d\sigma_{ij} = G_{ijkl}^{t+dt} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^T - d\varepsilon_{kl}^p) + dG_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T - \varepsilon_{kl}^p); \quad (1.8)$$

• Прирости температурних деформацій:

$$d\varepsilon_{ij}^T = \delta_{ij} (\alpha^{t+dt} dT + (\alpha^{t+dt} - \alpha)(T - T_0)); \quad (1.9)$$

• Прирости пластичних деформацій:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\chi \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}; \quad (1.10)$$

• Приріст координат центру поверхні за крок навантаження $[t, t + \Delta t]$:

$$do_{ij} = \left(d\sigma_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} - 2K \frac{\partial K}{\partial \bar{\varepsilon}_i^p} d\bar{\varepsilon}_i^p - 2K \frac{\partial K}{\partial T} dT \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{-1}; \quad (1.11)$$

Ключове співвідношення між приростами напружень і деформацій:

$$\{d\sigma\} = [C]^{t+\Delta t} (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_T\}) + [dC](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_p\}) + \{Z\}dT \quad (1.12)$$

Сформульовані співвідношення покладено в основу розробки числової методики дослідження процесів деформування елементів конструкцій складної форми та структури та відповідного програмного забезпечення.

Методика розв'язування:

Методику розв'язування сформульованої задачі нелінійної термомеханіки побудовано з використанням універсальних числових підходів на основі методу скінченних елементів та сімейства простих багатопараметричних однокрокових алгоритмів.

Відповідно до стандартної процедури методу зважених залишків домножимо рівняння (1,1), яке описує температурне поле в тілі, на довільну вагову функцію, зінтегруємо отримане співвідношення за областю визначення і застосуємо до нього формулу Остроградського-Гауса. З урахуванням умов (1,3), (1,6), отримаємо вихідне співвідношення для скінченно-елементного аналізу.

$$\int_V \left(c \frac{\partial T}{\partial t} w_0 + \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial w_0}{\partial x_i} - Q w_0 \right) dv + \int_S (\beta'(T - T_S) + q) w_0 ds = 0, \quad (2.1)$$
$$\forall w_0 \in \{w_0 \in L^2(V), \vec{\nabla} w_0 \in L^2(V)\};$$

Отримане співвідношення методу зважених залишків:

$$\begin{aligned} & \int \left([\mathbf{A}]^T \left([\mathbf{C}]^{t+\Delta t} [\mathbf{A}] d\mathbf{u} - [\mathbf{C}]^{t+\Delta t} \{d\varepsilon_T\} \right) \right) \cdot \mathbf{W} dv + \\ & + \int_V \left([\mathbf{A}]^T \left([d\mathbf{C}] (\{\varepsilon\}^t - \{\varepsilon_T\}^t - \{\varepsilon_p\}^t) + \{Z\} dT \right) + d\mathbf{F} \right) \cdot \mathbf{W} dv = \int_{S_\sigma} d\mathbf{p} \cdot \mathbf{W} ds \quad (2.2) \\ & \forall \mathbf{W} \in \{ \mathbf{W} \in (L^2(\Omega))^3, \vec{\nabla} \mathbf{W} \in (L^2(\Omega))^3 \} \end{aligned}$$

Скінченно-елементна дискретизація

$$T = [N] \{T_h\}_e; \quad \mathbf{u} = [\mathbf{N}] \mathbf{q}_e, w_0 = [N] \{w_h^0\}_e; \quad \mathbf{W} = [\mathbf{N}] \{W_h\}_e \quad (2.3)$$

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n]; \quad [\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}$$

$$[L_1] \{\dot{T}_h(t)\} + [L_0] \{T_h(t)\} = \{f_T\}, \quad \{T_h(0)\} = \{T_h^0\}; \quad (2.4)$$

$$[L_0]^{el} = \int_{V^{el}} [\partial \mathbf{N}]^T [\lambda] [\partial \mathbf{N}] dv + \int_{S^{el}} \beta' [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] ds, \quad [L_1]^{el} = \int_{V^{el}} c [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dv,$$

$$\{f_T\}^{el} = \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]^T Q dv + \int_{S^{el}} [\mathbf{N}]^T \beta' T_S ds - \int_{S^{el}} [\mathbf{N}]^T q ds; \quad (2.5)$$

$$[\lambda] = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix}; \quad [\partial \mathbf{N}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \frac{\partial N_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\{\mathbf{T}_h\}_{j+1} = \{\mathbf{T}_h\}_j + \{\delta\mathbf{T}_h\}\Delta t_j, \quad t_{j+1} = t_j + \Delta t_j \quad (2.6)$$

$$\{\delta\mathbf{T}_h\} = ([\mathbf{L}_1]_{j+1} + \Theta\Delta t_j[\mathbf{L}_0])^{-1}(\Theta\{\mathbf{F}_T\}_{j+1} + (1-\Theta)\{\mathbf{F}_T\}_j - [\mathbf{L}_0]_j\{\mathbf{T}_h\}_j) \quad (2.7)$$

$$[\mathbf{K}_{ep}]\{\Delta\mathbf{q}\} = \{\Delta\mathbf{P}\} \quad (2.8)$$

$$[\mathbf{K}_{ep}^{(el)}] = \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{A}]^T [\mathbf{C}]^{t_j+\Delta t_j} [\mathbf{A}] [\mathbf{N}] dv \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta\mathbf{P}\}^{(el)} = & \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{A}]^T \mathbf{C}^{t_j+\Delta t_j} \{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_T\} dv - \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]^T \Delta\mathbf{F} dv - \\ & - \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{A}]^T ([\Delta\mathbf{C}] (\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_T\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_p\}) + \{z\} \Delta T) dv + \int_{S_\sigma^{(el)}} [\mathbf{N}]^T \{\Delta\mathbf{p}\} ds. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Чисельна апроксимація характеристик матеріалів

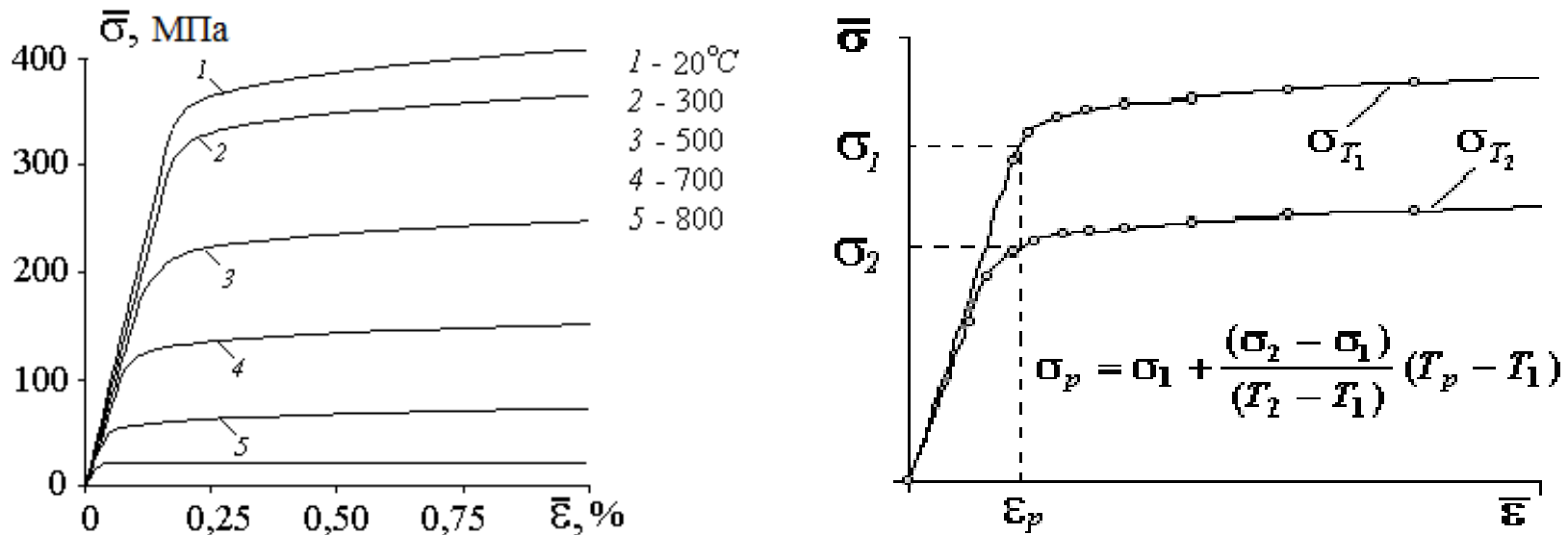
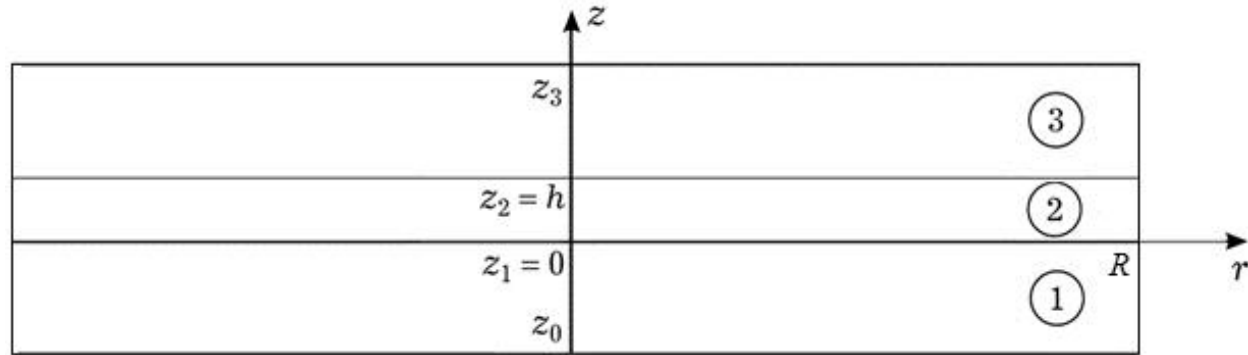


Рис. 2.1. Сплайн-апроксимація кривих деформування, залежних від температури

2. Дослідження термопружного стану трискладових плоскошаруватих тіл з та без урахування термочутливості за різної теплової дії

Постановка одновимірних задач теплопровідності для трискладових тіл

Розглядається трискладовий термочутливий непрозорий шар, який перебуває під дією залежних від осової координати z та часу джерел тепла та взаємодіє через обмежуючі поверхні $z = z_0$ і $z = z_3$ з середовищем змінної за часом температури шляхом конвективно-променевого теплообміну. Циліндрична поверхня теплоізолювана, а на поверхнях поділу виконуються умови ідеального термомеханічного контакту. В початковий момент часу у кожній складовій задано нерівномірний розподіл температури.



Рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial z} \right] = c_V^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial \tau} - w_{t,i}(z, \tau), \quad (i = \overline{1,3}) \quad (2.1)$$

умови ідеального теплового контакту:

$$t_i(z, \tau) \Big|_{z=z_i} = t_{i+1}(z, \tau) \Big|_{z=z_i}, \quad \left(\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i(z, \tau)}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_i} = \left(\lambda_t^{(i+1)}(t_{i+1}) \frac{\partial t_{i+1}(z, \tau)}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_i} \quad (2.2)$$

граничні та початкові умови:

$$\left(\lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} - \varepsilon_1(t_1) \sigma [R(t_1) - R(t_{c,1}(\tau))] - \alpha_1(t_1) [t_1 - t_{c,1}(\tau)] \right) \Big|_{z=z_0} = 0,$$
$$\left(\lambda_t^{(3)}(t_3) \frac{\partial t_3}{\partial z} + \varepsilon_3(t_3) \sigma [R(t_3) - R(t_{c,3}(\tau))] + \alpha_3(t_3) [t_3 - t_{c,3}(\tau)] \right) \Big|_{z=z_3} = 0, \quad (2.3)$$

$$t_i|_{\tau=0} = t_{0,i}(z), \quad (i = \overline{1,3})$$

$R(\eta) = (\eta + 273)^4$, $t_{c,1}(\tau)$ та $t_{c,3}(\tau)$ – температури середовищ, з якими відбувається теплообмін через поверхні $z = z_0$ і $z = z_3$ відповідно, $\varepsilon_1(t_1)$, $\varepsilon_3(t_3)$ – ступені чорноти цих поверхонь, $\alpha_1(t_1)$, $\alpha_3(t_3)$ – коефіцієнти теплообміну через ці поверхні, σ – стала Стефана-Больцмана;

Для півбезмежного трискладового

тіла ($z_0 = -\infty$)

$$t_1(z, \tau) \Big|_{z \rightarrow -\infty} = 0 \quad (2.4)$$

Для безмежного трискладового

тіла ($z_0 = -\infty$ і $z_3 = \infty$)

$$t_3(z, \tau) \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0 \quad (2.5)$$

Методика розв'язання задач теплопровідності для трискладових тіл

1. часткова лінеаризація задачі з допомогою використання перетворення Кірхгофа;
2. зведення отриманої задачі для системи диференціальних рівнянь відносно змінних Кірхгофа до еквівалентної задачі типу теплопровідності для одного рівняння з узагальненими похідними;

3. інтегральне подання розв'язку отриманої задачі за допомогою функції Гріна;
4. знаходження змінних Кірхгофа та її похідних, які входять у інтегральні подання;
5. застосування оберненого перетворення Кірхгофа.

Для розв'язання задачі (2.1)-(2.3) застосуємо перетворення Кірхгофа:

$$\theta_i = \frac{1}{\lambda_{0,i}} \int_0^{t_i} \lambda_t^{(i)}(x) dx,$$

коефіцієнти теплопровідності: $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{0,i} (1 + \beta_i t_i)$

об'ємні теплоємності: $c_V^{(i)}(t_i) = c_{0,i} c_i(t_i)$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_{0,i} \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \right] = \frac{c_{0,i} c_i(t_i)}{1 + \beta_i t_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \tau} - w_{t,i}(z, \tau) \quad (2.6)$$

$$\left(\lambda_{0,1} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - P_1(\tau) \right) \Big|_{z=z_0} = 0, \quad \left(\lambda_{0,3} \frac{\partial \theta_3}{\partial z} + P_3(\tau) \right) \Big|_{z=z_3} = 0 \quad (2.7)$$

$$\theta_i \Big|_{\tau=0} = \theta_{0,i}(z), \quad \theta_{0,i}(z) = t_{0,i}(z) + \frac{\beta_i t_{0,i}^2(z)}{2}, \quad i=1,2,3$$

$$(\theta_{i+1} - \theta_i) \Big|_{z=z_i} = F_{i+1}(\tau), \quad \lambda_{0,i} \frac{\partial \theta_i(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_i} = \lambda_{0,i+1} \frac{\partial \theta_{i+1}(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_i}, \quad (2.8)$$

$$F_{i+1}(\tau) = \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_{i+1}} \right) \left[\theta_{i+1}(z_i, \tau) - \beta_{i+1}^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\beta_{i+1} \theta_{i+1}(z_i, \tau)} - 1 \right) \right],$$

$$P_i(\tau) = \varepsilon_i(\theta_i^*(\tau))\sigma[R(\theta_i^*(\tau)) - R(t_{c,i}(\tau))] + \alpha_i(\theta_i^*(\tau))[\theta_i^*(\tau) - t_{c,i}(\tau)],$$

$$\theta_i^*(\tau) = \beta_i^{-1}(\sqrt{1 + 2\beta_i\bar{\theta}_i(\tau)} - 1), \quad i=1, 3 \quad \bar{\theta}_1(\tau) = \theta_1(z_0, \tau), \quad \bar{\theta}_3(\tau) = \theta_3(z_3, \tau)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = c_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + c_0(z) b(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} F_{j+1}(\tau) \delta'(z - z_j) - w_t(z, \tau) \quad (2.9)$$

$$\theta|_{\tau=0} = \theta_0(z), \quad b(\theta) = \frac{c_1(\theta_1)}{\Lambda_1(\theta_1)} + \sum_{j=1}^2 \left[\frac{c_{j+1}(\theta_{j+1})}{\Lambda_{j+1}(\theta_{j+1})} - \frac{c_j(\theta_j)}{\Lambda_j(\theta_j)} \right] S(z - z_j) - 1$$

$S(z)$ – функція Гевісайда, $\delta'(z)$ – похідна від дельта-функції Дірака

$\theta(z, \tau)$, $\theta_0(z)$, $w_t(z, \tau)$, $\lambda_0(z)$, $c_0(z)$ мають вигляд

$$p(z) = p_1(z) + \sum_{k=1}^2 (p_{k+1}(z) - p_k(z)) S(z - z_k)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_t(z) \frac{\partial G}{\partial z} \right] = c_V(z) \frac{\partial G}{\partial \tau} - \delta(z - \zeta) \delta(\tau) \quad (-\infty \leq z \leq \infty) \quad (2.10)$$

$$G|_{z \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0, \quad G|_{\tau=0} = 0.$$

$G(z, \zeta, \tau)$ - функція Гріна лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору

$$G(z, \zeta, \tau) = G_1(z, \zeta, \tau) + \sum_{k=1}^2 (G_{k+1}(z, \zeta, \tau) - G_k(z, \zeta, \tau)) S(z - z_k), \quad (2.11)$$

$$G_i(z, \zeta, \tau) = G_{i,1}(z, \zeta, \tau) + \sum_{k=1}^2 (G_{i,k+1}(z, \zeta, \tau) - G_{i,k}(z, \zeta, \tau)) S(\zeta - z_k).$$

Інтегральне формулювання задачі на змінну Кірхгофа

для трискладового шару

$$\begin{aligned} \theta(z, \tau) = & - \int_{z_0}^{z_3} \int_0^{\tau} c_0(z) G(z, \zeta, \tau - \tau') b(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau'} d\tau' d\zeta + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} \times \\ & \times \int_0^{\tau} \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' - \int_0^{\tau} \{ G(z, \zeta, \tau - \tau') P_3(\tau') + \lambda_{0,3} \bar{\theta}_3(\tau') \times \\ & \times \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_3} \} d\tau' - \int_0^{\tau} \left\{ G(z, \zeta, \tau - \tau') P_1(\tau') - \lambda_{0,1} \bar{\theta}_1(\tau') \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_0} \right\} d\tau' + \\ & + \int_{z_0}^{z_3} \left[c_0(\zeta) G(z, \zeta, \tau) \theta_0(\zeta) + \int_0^{\tau} G(z, \zeta, \tau - \tau') w_t(\zeta, \tau') d\tau' \right] d\zeta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

для півбезмежного трискладового стержня

$$\begin{aligned} \theta(z, \tau) = & - \int_{-\infty}^{z_3} \int_0^{\tau} c_0(z) G(z, \zeta, \tau - \tau') b(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau'} d\tau' d\zeta + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} \times \\ & \times \int_0^{\tau} \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' - \int_0^{\tau} \{ G(z, \zeta, \tau - \tau') P_3(\tau') + \lambda_{0,3} \bar{\theta}_3(\tau') \times \\ & \times \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_3} \} d\tau' + \int_{-\infty}^{z_3} \left[c_0(\zeta) G(z, \zeta, \tau) \theta_0(\zeta) + \int_0^{\tau} G(z, \zeta, \tau - \tau') w_t(\zeta, \tau') d\tau' \right] d\zeta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

для безмежного трискладового стержня

$$\begin{aligned} \theta(z, \tau) = & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} c_0(z) G(z, \zeta, \tau - \tau') b(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau'} d\tau' d\zeta + \\ & + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} \int_0^{\tau} \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' - \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \left[c_0(\zeta) G(z, \zeta, \tau) \theta_0(\zeta) + \int_0^{\tau} G(z, \zeta, \tau - \tau') w_t(\zeta, \tau') d\tau' \right] d\zeta. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Шукане температурне поле знаходимо зі співвідношення:

$$t_i(\theta) = \beta_i^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\beta_i \theta_i(z, \tau)} - 1 \right). \quad (2.15)$$

Отримано нові інтегральні подання розв'язків відносно температури або змінної Кірхгофа, в яких на поверхнях поділу відповідно відсутні або лише одна невідома. Для випадку температурнозалежних ФМХ за припущення, що коефіцієнти температуропровідності незначно залежать від температури і їх можна прийняти сталими в межах кожної складової (т.зв. «проста нелінійність») визначення невідомих, які входять у ці подання, з використанням лінійних сплайнів зведено до розв'язання рекурентної системи двох, трьох або чотирьох нелінійних алгебричних рівнянь відносно шуканих значень у вузлах сітки.

Визначення термопружного стану

У тілі ненульовими будуть радіальні та кільцеві напруження:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_0(z, \tau), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = \sigma_{r\varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{1 - \bar{\nu}(t, z)}{\bar{E}(t, z)} \sigma_0(z, \tau) + \bar{\Phi}(t, z) \right] = 0, \quad (2.16)$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_0(z, \tau) = \frac{\bar{E}(z, \tau)}{1 - \bar{\nu}(z, \tau)} [C_1(\tau) + z C_2(\tau) - \bar{\Phi}(z, \tau)], \quad (2.17)$$

$C_1(\tau)$ і $C_2(\tau)$ визначені з умов рівності нулю головного вектора і головного моменту радіальних напружень σ_{rr}

$$u = r[C_1(\tau) + C_2(\tau)z], \quad \frac{\partial w}{\partial z} = Q_1^*(z, \tau) + Q_2^*(z, \tau). \quad (2.18)$$

$$Q_1^*(z, \tau) = -\frac{2\bar{\nu}(t, z)}{1 - \bar{\nu}(t, z)} [C_1(\tau) + C_2(\tau)z], \quad Q_2^*(z, \tau) = \frac{1 + \bar{\nu}(t, z)}{1 - \bar{\nu}(t, z)} \bar{\Phi}(t, z)$$

$$w = Q(z, \tau) + w_0(r, \tau), \quad w_0(r, \tau) = -C_2(\tau)r^2/2 + C$$

де $Q(z, \tau)$ – первісна по змінній z від $Q^*(z, \tau) = Q_1^*(z, \tau) + Q_2^*(z, \tau)$

Для півбезмежного
трискладового стержня

Для безмежного
трискладового стержня

$$\sigma_0(z, \tau) = -\frac{\bar{E}(t, z)}{1 - \bar{\nu}(t, z)} \bar{\Phi}(t, z), \quad (2.19)$$

$$w(z, \tau) = \int_{z_3}^z \frac{1 + \bar{\nu}(t, \bar{z})}{1 - \bar{\nu}(t, \bar{z})} \bar{\Phi}(t, \bar{z}) d\bar{z}$$

$$w(z, \tau) = \int_{h/2}^z \frac{1 + \bar{\nu}(t, \bar{z})}{1 - \bar{\nu}(t, \bar{z})} \bar{\Phi}(t, \bar{z}) d\bar{z}$$

Методику апробовано на:

❑ **лінійних задачах теплопровідності та відповідних задачах термопружності за сталих ФМХ для:**

- *безмежного трискладового стержня під час остигання;*
 - отримано інженерні формули для визначення термопружного стану
- *безмежного трискладового стержня за дії поверхневого періодичного джерела тепла синусоїдального або косинусоїдального характеру зміни інтенсивності;*
- *безмежного трискладового стержня за дії імпульсного джерела тепла;*

❑ **нелінійних задачах теплопровідності та відповідних задачах термопружності за температурнозалежних ФМХ для:**

- *безмежного трискладового стержня за нерівномірного початкового нагріву складових;*
- *безмежного трискладового стержня за дії рівномірно розподіленого по об'єму проміжкового шару чи зосередженого на одній з поверхонь поділу імпульсного джерела тепла;*
- *півбезмежного трискладового стержня за конвективно-променевого теплообміну;*
- *трискладового шару за конвективно-променевого теплообміну;*

Проведено порівняльний аналіз часткових випадків з відомими в літературі.

Проведено аналіз числових досліджень впливу температурної залежності фізико-механічних характеристик та товщин складових і параметрів теплообміну на розподіли нестационарних температурних полів, напружень та переміщень.

Цикл наукових праць складається з 36 публікацій, серед яких: одна глава монографії, виданої за кордоном, 13 статей у фахових виданнях, з них 3 – в журналах, які реферуються наукометричною базою Scopus, 22 публікації в матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій. Згідно бази даних Google Scholar роботи процитовано 10 разів, а їх індекс Гірша дорівнює 2.

Розділ монографії, виданої за кордоном

1. Дробенко Б., Боженко Б., Бурык А. Високотемпературный индукционный нагрев термочувствительного цилиндра // Manufacturing processes. Some problems. Vol.2: Modelling and optimization of manufacturing processes. Studia i monografie, z. NR 331 / Ed. by M.Gajek, A.Nachkevych, A. Stanik-Besler Politechnika Opolska (ISSN 978-83-62736-86-7), Opole, 2012. –P. 101-112.

Основні статті

1. Бурик О.О., Дробенко Б.Д. Напружено-деформований стан елементів будівельних конструкцій під час пожежі / Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2014. – 57, №3. – С. 155–165.
2. Процюк Б.В., Горун О.П. Квазістатичний термопружний стан термо-чутливого трискладового шару за конвективно–променевого теплообміну // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 2. – С. 98-108.
3. Процюк Б.В., Горун О.П. Термопружний стан півбезмежного термочутливого трискладового стержня за конвективно–променевого теплообміну // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2016. – 52, № 3. – С. 15-23.
4. Drobenko B., Buryk A., Kharchenko V. Refined estimation of strength of structures from carbon-carbonic materials subjected to intense power and thermal loading / Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2015. – Вип. 22. – С. 53-59.

● *Дякуємо за Вашу увагу!*