

Робота № 38

"Якісні методи дослідження моделей  
математичної фізики"

представлена

Інститутом математики НАН України

на здобуття

Державної премії України в галузі науки і техніки  
2018 року

# Склад авторського колективу

1. КОЧУБЕЙ Анатолій Наумович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, завідувач відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України, м. Київ.
2. РЕБЕНКО Олексій Лукич, доктор фізико-математичних наук, професор, головний науковий співробітник відділу математичної фізики Інституту математики НАН України, м. Київ.
3. МИКИТЮК Ігор Володимирович, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу аналізу, геометрії та топології Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів.
4. ПРИКАРПАТСЬКИЙ Анатолій Карольович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри економіки та менеджменту Інституту фізики, математики, економіки та інноваційних технологій Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, м. Дрогобич.

# Склад авторського колективу

5. САМОЙЛЕНКО Валерій Григорович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, м. Київ.

6. ФЕЛЬДМАН Геннадій Михайлович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, заступник директора з наукової роботи Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України, м. Харків.

7. ЩЕРБИНА Марія Володимирівна, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, завідувач відділу математичної фізики Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України, м. Харків.

... Багато відкриттів у галузі математики завдячує своєю появою проблемам, взятим з фізики; у свою чергу, виникнення багатьох фізичних теорій було б неможливим без участі математики.

(Парасюк О.С., Наука і життя, 1964, №6).

Математика в афоризмах, цитатах і висловлюваннях. – Київ: Вища школа, 1974. – с.53.

# Список монографій

Робота складається з 16 монографій і 122 наукових статей, які опубліковані протягом періоду 1975 – 2016 рр.

Список монографій:

1. **Rebenko O. L.** Theory of interacting quantum fields. – De Gruyter Studies in Mathematics. – 2012, vol. 39. – 584 p.
2. Blackmore D., **Prykarpatsky A. K., Samoilenko V. Hr.** Nonlinear dynamical systems of mathematical physics: spectral and symplectic integrability analysis. – World Scientific Publishing, 2011. – 564 p.
3. Pastur L., **Shcherbina M.** Eigenvalue distribution of large random matrices. – Providence: American Mathematical Society, 2011. – 632 p.
4. **Feldman G. M.** Functional equations and characterization problems on locally compact Abelian groups. EMS Tracts in Mathematics. – Zurich: European Mathematical Society, 2008, vol. 5. – 268 p.
5. **Mykytyuk I. V.** Invariant Kahler structures on the cotangent bundle of symmetric spaces and reduction. Reviews in Mathematics and Mathematical Physics. - Cambridge Scientific Publishing, 2005. – Vol. 12. – 96 p.

# Список монографій

6. Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., **Kochubei A. N.** Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 400 p.
7. **Prykarpatsky A. K.**, Taneri Ufuk, Bogolubov N. N. Quantum Field Theory with Application to Quantum Nonlinear Optics. – World Scientific Publishing, 2002. – 132 p.
8. **Kochubei A. N.** Pseudodifferential equations and stochastics over non-archimedean fields, Marcel Dekker, New York, 2001. – 320 p.
9. **Prykarpatsky A. K.**, **Mykytiuk I. V.** Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds. Classical and quantum aspects. – Kluwer Academic Publishers, 1998. – 554 p.
10. **Fel'dman G. M.** Arithmetic of probability distributions, and characterization problems on abelian groups. Translations of Mathematical Monographs, v. 116. – Providence: American Mathematical Society, 1993. – 229 p.
11. **Фельдман Г. М.** Характеризационные задачи математической статистики на локально компактных абелевых группах. – Киев: Наукова думка, 2010. – 432 с.

# Список монографій

12. **Ребенко О. Л.** Основы сучасної теорії взаємодіючих квантових полів. – Київ: Наукова думка, 2007. – 538 с.
13. **Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.** Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. – Киев: Наукова думка, 1991. – 287 с.
14. **Фельдман Г. М.** Арифметика вероятностных распределений и характеристические задачи на абелевых группах. – Киев: Наукова думка, 1990. – 168 с.
15. Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н. (мл.), **Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.** Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. – Киев: Наукова думка, 1987. – 296 с.
16. Петрина Д. Я., Иванов С. С., **Ребенко А. Л.** Уравнения для коэффициентных функций матрицы рассеяния. – М.: Наука, 1979. – 269 с.

# Наукові праці

З 16 монографій даної роботи

10 опубліковано у відомих англomовних видавництвах США, Великобританії, Німеччини, Франції, Швейцарії (American Mathematical Society, Birkhauser, Europe Mathematical Society, Marcel Dekker, Cambridge Scientific Publication, De Gruyter Studies in Mathematics, Kluwer Academic Publishers, World Scientific Publishing Company),

1 – у видавництві "Наука" ,

5 – у видавництві "Наукова думка" .

Статті даної роботи опубліковано у реферованих наукових виданнях, з них

81 – у англomовних закордонних журналах,

21 – у виданнях АН СРСР і Російської АН,

20 – у провідних наукових журналах України.

121 стаття опублікована у журналах з імпакт-фактором, серед яких

72 статті – у виданнях з імпакт-фактором більше 0,6,

48 статей – у виданнях з імпакт-фактором від 1,026 до 2,784.

Автори роботи неодноразово запрошувалися для читання лекцій і виступу з науковими доповідями до провідних університетів світу (США, Італія, Німеччина, Франція, Англія, Канада, Польща, Швеція, Бразилія, країни СНД) і неодноразово виступали з пленарними доповідями на багатьох міжнародних і вітчизняних конференціях та симпозиумах.



# Склад авторів і їх персональний вклад

КОЧУБЕЙ А.Н. (1949 р.н., математик, Київський державний університет ім. Т.Г. Шевченка) – 2 монографії, 13 статей.

РЕБЕНКО О.Л. (1945 р.н., фізик-теоретик, Київський державний університет ім. Т.Г. Шевченка) – 3 монографії, 16 статей.

МИКИТЮК І.В. (1960 р.н., математик, Московський державний університет ім. М.В. Ломоносова) – 3 монографії, 13 статей.

ПРИКАРПАТСЬКИЙ А.К. (1953 р.н., фізик, Львівський державний університет ім. І. Франка) – 5 монографій, 46 статей.

САМОЙЛЕНКО В.Г. (1955 р.н., математик, Київський державний університет ім. Т.Г. Шевченка) – 2 монографії, 22 статті.

ФЕЛЬДМАН Г.М. (1947 р.н., математик, Харківський державний університет ім. В.Н. Каразіна) – 4 монографії, 14 статей.

ЩЕРБИНА М.В. (1958 р.н., математик, Харківський державний університет ім. В.Н. Каразіна) – 1 монографія, 14 статей.

# Мета роботи і об'єкти досліджень

Мета роботи полягає в дослідженні актуальних задач теорії динамічних систем сучасної математичної і теоретичної фізики та побудові нових ефективних методів якісного аналізу широкого класу моделей математичної фізики та їх застосуванню.

У роботі приділено значну увагу вивченню широкого кола математичних моделей, які використовуються у фізиці, механіці, квантовій інформатиці, теорії передачі інформації, теорії випадкових графів, інших галузях природознавства і техніці.

Розглянуто інтегровні системи, моделі квантової теорії поля і статистичної механіки, еліптичні та параболічні рівняння з частинними похідними і дробово-диференціальні рівняння, що описують неklasичну дифузію (аномально повільну дифузію на фракталах), методи  $p$ -адичного аналізу, характеристичні задачі математичної статистики на локально компактних абелевих групах, нормовані зліченні міри власних значень різних класів випадкових матриць у границі, коли вимірність таких матриць прямує до нескінченності, матричні  $\beta$ -моделі, що природним чином виникають у теорії струн і мають численні зв'язки з статистичною фізикою, теорією ортогональних поліномів, комбінаторикою, комплексним аналізом, тощо.

# Напрями досліджень

У роботі отримали розвиток такі актуальні напрями сучасної математичної фізики, як:

теорія еволюційних рівнянь та загальних граничних задач;  
методи неархімедового аналізу і неархімедової стохастики та їх застосування;

якісно-аналітичний аналіз інтегровності нелінійних динамічних систем математичної фізики;

алгебро-геометричні методи та їх застосування в теорії інтегровних динамічних систем математичної фізики і теорії геометричного квантування;

якісно-аналітичні методи нескінченновимірного аналізу та їх застосування в квантовій теорії поля і статистичній механіці;

імовірнісні методи в задачах спектральної теорії та на групах.

Результати даної роботи мають важливе значення як для розвитку теорії рівнянь математичної фізики, так і для дослідження конкретних математичних моделей різноманітних фізичних явищ і процесів в техніці.

# Найбільш вагомі наукові результати роботи. Внесок авторів, новизна, теоретична і практична значимість наукових результатів

Основні результати роботи з теорії еволюційних рівнянь та загальних граничних задач і методів неархімедового аналізу і неархімедової стохастичності та їх застосування (розділ 4) коротко характеризуються так:

- започатковано і розвинуто теорію еволюційних рівнянь із дробовими похідними за часом, яка набула значної актуальності в зв'язку з фізичними застосуваннями (аномальна дифузія у фрактальних середовищах). Роботи А. Н. Кочубея [26, 27] належать до числа перших у світовій математичній літературі в цій галузі;
- побудовано теорію задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь із квазіоднорідними символами, що, зокрема, дало першу аналітичну конструкцію розривних марківських процесів.
- розвинуто низку напрямів у аналізі комплекснозначних функцій над неархімедовими полями, зокрема, досліджено різноманітні класи псевдодиференціальних рівнянь, розвинуто теорію марківських процесів на полі  $p$ -адичних чисел, спектральну теорію, нескінченновимірний аналіз;
- розвинуто нині широко вживаний метод абстрактних граничних умов у теорії розширень симетричних операторів.

# Нові класи еволюційних рівнянь та загальні граничні задачі

До даного напрямку відносяться праці А.Н.Кочубея, в яких:

(i) започатковано і розвинуто теорію еволюційних рівнянь із дробовими похідними за часом, яка набула значної актуальності в зв'язку з фізичними застосуваннями (аномальна дифузія у фрактальних середовищах).

Зокрема, побудовано розв'язок задачі Коші для рівняння зі сталими коефіцієнтами, а для загального випадку доведено теорему єдиності; розвинуто метод параметриксу для рівнянь зі змінними коефіцієнтами та систем рівнянь.

(ii) у зв'язку з появою в фізиці невпорядкованих систем моделей ультраповільної дифузії з логарифмічним зростанням середньоквадратичного відхилення частки, що дифундує, розвинуто математичну теорію еволюційних рівнянь із похідними розподіленого порядку та більш загальними операторами типу дробового диференціювання за часовою змінною.

(iii) започатковано теорію абстрактних операторно-диференціальних рівнянь із дробовими похідними, яка у подальшому розвинута у працях багатьох математиків.

# Нові класи еволюційних рівнянь та загальні граничні задачі

(iv) побудовано теорію задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь із квазіоднорідними символами, що, зокрема, дало першу аналітичну конструкцію розривних марківських процесів.

(v) створено метод абстрактних граничних умов у теорії розширень симетричних операторів – загальний опис розширень, який у застосуваннях до диференціальних операторів формулюється в термінах умов на межі області, в особливих точках, тощо.

Подальший розвиток і застосування методу здійснювались багатьма математиками різних країн і на сьогодні він є загальноновживаним для опису та дослідження розширень, що є необхідним, зокрема, для повного опису багатьох операторів квантової механіки.

# Методи неархімедового аналізу та неархімедової стохастики

Цей напрям представлений працями А.Н. Кочубея, результати якого з даного напрямку можна описати так:

- (i) побудовано фундаментальні розв'язки псевдодиференціальних операторів, що діють на комплекснозначні функції, які визначено на неархімедовому локальному полі.
- (ii) розвинуто спектральну теорію операторів типу Шредінгера на неархімедовому локальному полі.
- (iii) розвинуто теорію задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь на неархімедовому локальному полі.
- (iv) введено та досліджено стохастичні інтеграли та стохастичні диференціальні рівняння на неархімедовому локальному полі; доведено граничні теореми для сум незалежних однаково розподілених  $p$ -адичних випадкових величин.
- (v) закладено основи неархімедового нескінченновимірного аналізу.

# Якісно-аналітичний аналіз інтегровності нелінійних динамічних систем

Цей напрям представлено в працях Микитюка І.В., Прикарпатського А.К. і Самойленка В.Г.

В останні декілька десятиліть було встановлено, що багато динамічних систем класичної математичної і теоретичної фізики допускають симплектичні структури, які породжуються, в більшості випадків, невиродженими дужками Пуассона.

Моделі сучасної математичної фізики зазвичай розглядаються як певні динамічні системи і вивчаються загальними математичними методами, особливу ефективність серед яких мають ті методи, які використовують методи теорії алгебр і груп Лі, методи диференціальної геометрії, функціональний і комплексний аналіз. Багато важливих властивостей таких динамічних систем пов'язано з наявністю у них спеціальних алгебро-геометричних структур, зокрема, пуассонових.

Особливий Лі-алгебраїчний зміст виявлено у нелінійних динамічних систем, яких характерна спеціальна властивість ізоспектральності типу Лакса.



# Якісно-аналітичний аналіз інтегровності нелінійних динамічних систем

Розглянуто важливі властивості нелінійних динамічних систем математичної і теоретичної фізики, що стосуються їх спектральних та алгебро-геометричних властивостей і побудови в явному вигляді їх розв'язків. Авторами розвинуто ефективний операторно-функціональний підхід до дослідження повної інтегрованості і побудови гамільтонової структури нелінійних динамічних систем, який застосовано для вивчення широкого класу нелінійних динамічних систем математичної фізики, що задаються нелінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними, та побудови точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними і їх дискретних аналогів.

У процесі дослідження інтегровності динамічних систем визначається симплектична структура (дужка Пуасона), що дозволяє записати вихідну динамічну систему в гамільтоновій формі; визначити її перші інтеграли (змінні дії або закони збереження); визначити додаткові множини змінних, обчислити їх еволюцію під дією гамільтонових потоків, що асоційовані з першими інтегралами, та знайти зображення типу Лакса.

# Якісно-аналітичний аналіз інтегровності нелінійних динамічних систем

Використовуючи розвинутий авторами градієнтно-голономний алгоритм дослідження прямої проблеми класифікації інтегровних нелінійних динамічних систем, знайдено у явному вигляді всі симплектичні структури узагальненої ієрархії гідродинамічних систем типу Рімана та їх важливих для застосувань модифікацій. На основі алгебро-геометричних методів для цієї ієрархії описано так звані скінченно-породжені інваріантні ідеали та відповідні їм скінченновимірні зображення алгебр диференціювань у формі Лакса. Розкрито структуру прихованих симетрій і встановлено залежність між інтегровністю відповідних потоків на спеціальних ко-алгебрах Лі із умовою Пуасоновості та спеціальною  $D$ -структурою на них, яка при певних умовах еквівалентна запропонованій школою Л.Д.Фаддєєва дуальній  $R$ -структурі.

Цю ж методику побудови редукованих динамічних систем на основі теореми Марздена-Вайнштейна ефективно застосовано до розв'язання проблеми єдиного опису гамільтонового формалізму класичних рівнянь Максвелла та релятивістської умови Лоренца для потенціальної 4-вектор-функції.

# Якісно-аналітичний аналіз інтегровності нелінійних динамічних систем

На основі розвитку спектральної теорії конгруентності диференціальних операторів та узагальнення диференціально-геометричної теорії Ходжа, що запропонована в класичних працях І.В.Скрипника, отримано важливі результати з теорії класифікації інтегровних багатовимірних нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах та описано спеціальні класи зв'язностей типу Картана з умовами нульової кривини на інтегральних підмноговидах розв'язків і ефективно розв'язано важливу задачу про класифікацію інтегровних гамільтонових потоків на многовидах Грасмана.

Розвинуто алгебраїчний підхід до теорії квантового методу Боголюбова для динамічних систем статистичної механіки на базі теорії унітарних зображень стандартної (канонічної) квантової алгебри струмів. Розглянуто важливий частинний випадок цієї алгебри - описано циклічні унітарні зображення узагальненої алгебри Вірасоро на осі.

Також дано опис алгебраїчних і диференціально-геометричних аспектів інтегровності гладких нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах.

# Якісно-аналітичний аналіз інтегровності нелінійних динамічних систем

За допомогою градієнтно-голономного алгоритму досліджено нелінійну квантово-механічну модель типу Шредінгера, що описує одновимірний бозе-газ із узагальненим  $i\delta'$ -потенціалом попарної взаємодії між частинками. Запропоновано дискретну версію апроксимаційного підходу В.О.Марченка для побудови точних скінченно-зонних розв'язків для періодичної дискретизації рівняння Кортвега-де Фріза.

Побудовано нескінченну ієрархію нелінійних динамічних систем типу Неймана на  $N$ -вимірній сфері за допомогою узагальнення підходу Ю.Мозера для випадку скінченнозонних розв'язків рівняння КдФ.

Розвинуто конструкцію функціональної редукції типу Дірака для інтегрованих за Лаксом нелінійних динамічних систем як на функціональних, так і на функціонально-операторних банахових многовидах в рамках градієнтно-голономного алгоритму інтегрованості. Дано застосування результатів до класичної проблеми квантування типу Дірака для гамільтонових систем.

Розглянуто аналітичний опис електродинамічних моделей взаємодії заряджених частинок з електромагнітним полем на основі нових конструкцій лагранжевого та гамільтонового аналізу, що базуються на релятивістській моделі вакуумно-польового середовища.

# Якісно-аналітичний аналіз інтегровності ...

Запропоновано ефективний підхід до класифікації основних алгебраїчних структур інтегровних багато-компонентних гамільтонових систем, який дозволяє будувати нові алгебраїчні структури, в межах яких відповідні оператори Гамільтона існують та генеруються інтегровними багато-компонентними динамічними системами. Показано, що класична алгебраїчна структура Новікова, отримана раніше як умова гамільтоновості на матрично-значний диференціальний вираз, виявляється у даному підході як узагальнене диференціювання алгебри Лі, яке природним чином пов'язано з відповідно побудованою диференціальною петлевою алгеброю Лі.

Як пряме узагальнення цього підходу отримано два нових диференціювання, основні алгебраїчні структури яких збігаються, відповідно, з відомим правилом Лейбніца та із новою алгеброю Рімана, які природним чином генерують різні гамільтонові оператори, що описують широкий клас багато-компонентних ієрархій інтегровних гідродинамічних систем типу Рімана. Вивчено алгебраїчні структури, що асоційовані з алгеброю Лейбніца, які мають важливе значення для її представлень.

Запропоновано новий диференціально-алгебраїчний метод для вивчення інтегровності за Лаксом узагальнених гідродинамічних ієрархій типу Рімана.

# Якісно-аналітичний аналіз інтегровності ...

В рамках запропонованого авторами вакуумно-польового підходу до опису електродинамічних моделей в рамках лагранжевого формалізму побудовано динаміку частинки в зовнішньому електромагнітному полі у класичній формі типу Лагранжа.

Розроблено метод геометричного квантування цілком інтегровних гамільтонових динамічних систем на многовидах з точною симплектичною структурою, який дає змогу описати спектр відповідної квантової системи в термінах групи характерів фундаментальної групи відкритого симплектичного підмноговиду, який визначається інтегралами системи. Обчислення виконано в термінах змінних дія-кут, які є природними локальними змінними для цілком інтегровних динамічних систем в околі інваріантних торів. Це дає змогу побудувати структуру гільбертового простору на просторі узагальнених перерізів, горизонтальних відносно дійсної поляризації з особливостями, яку визначають інтеграли системи. Цей метод в рамках процедури геометричного квантування ефективно застосовано для квантування динамічної системи типу Неймана на двовимірній сфері та для обчислення дискретного спектру і відповідних власних функцій квантової динамічної системи типу Неймана на двовимірній сфері.

# Алгебро-геометричні методи та їх застосування в теорії інтегровних динамічних систем і теорії геометричного квантування

Ці дві, на перший погляд досить далекі теорії – теорію інтегровних динамічних систем та теорію геометричного квантування в публікаціях авторів роботи поєднує спільний метод дослідження, а саме, метод редукції та його узагальнення.

Застосування методу симплектичної редукції для побудови та дослідження динаміки динамічних систем добре відоме, починаючи з 70-х років минулого століття з праць Дж. Марсдена і А. Вейнстейна, В.І. Арнольда, В. Гійеміна і С. Стернберга, А.М. Переломова та ін.

Проте тільки в публікаціях авторів роботи вперше метод редукції в поєднанні з алгебраїчними методами ефективно застосовано для обчислення ко-рангів вироджених бі-пуассонових структур на алгебрах інваріантних функцій, що необхідно для доведення повноти системи інтегралів динамічної системи.

# Алгебро-геометричні методи та їх застосування в теорії інтегровних динамічних систем і теорії геометричного квантування

Узагальнення методу редукції для побудови структур, пов'язаних з геометричним квантуванням, зокрема, келерових поляризацій, було розроблено В. Гійеміном і С. Стернбергом в 80-х роках минулого століття, а пізніше вдосконалено в 90-х роках П. Хайнцнером, А. Хаклберрі і Ф. Лоосом, М. Готе, А. Снятицьким, М. Путою, Дж. Раунслі і П. Робінсоном, Н. Хітчиним, Р. Белявским, С. Дональдсоном, О. Бікаром, Ф. Кірван, М. Бріоном, Ф. Кноппом та ін.

Проте тільки в публікаціях авторів роботи вперше узагальнення методу редукції в поєднанні з алгебро-геометричними методами ефективно застосовано не для конструювання нових структур, а для класифікації і опису всіх келерових структур з певними властивостями та обчислення спектрів квантових систем, отриманих методом геометричного квантування з класичних гамільтонових систем.



# Алгебро-геометричні методи та їх ...

До результатів пріоритетного характеру з даного напрямку відносяться такі результати авторів роботи:

- розроблено метод геометричного квантування цілком інтегровних гамільтонових динамічних систем на многовидах з точною симплектичною структурою, який дає змогу описати спектр відповідної квантової системи в термінах групи характерів фундаментальної групи відкритого симплектичного підмноговиду, який визначається інтегралами системи. Цей метод застосовано для квантування динамічної системи типу Неймана на дво-вимірній сфері;
- отримано класифікацію келерових структур з канонічною симплектичною структурою в якості келерової форми інваріантних відносно нормалізованого геодезичного потоку на кодотичних розшаруваннях компактних симетричних просторів рангу один;
- отримано класифікацію інваріантних гіпер-келерових структур на ко-дотичних розшаруваннях ермітових компактних симетричних просторів, які продовжують натуральну голоморфну симплектичну структуру на цих розшаруваннях;

# Алгебро-геометричні методи та їх ...

– вперше (в 1986 році) отримано повну класифікацію однорідних просторів  $G/K$  компактних півпростих груп Лі  $G$ , для яких квазірегулярне представлення  $G$  має простий спектр (аналогічна класифікація була отримана роком пізніше французьким математиком Бріоном, а відповідна класифікація для простих груп  $G$  була зроблена Крамером ще в 1978 році); хоча задача класифікації цих просторів була поставлена раніше в гармонічному аналізі (пари Гельфанда  $(G, K)$ ), теорії алгебраїчних груп (сферичні пари  $(G, K)$ ) та теорії комплексних однорідних редуктивних просторів (простори складності нуль), все ж цю класифікацію отримано методами теорії динамічних систем при дослідженні інтегровності геодезичного потоку інваріантної метрики на ко-дотичному розшаруванні до  $G/K$  та дослідженні множини  $G$ -інваріантних функцій на цьому ж просторі як алгебри Пуассона;

– отримано повну класифікацію майже сферичних пар  $(G, K)$  компактних груп Лі на підставі дослідження інтегровності геодезичного потоку інваріантної метрики на ко-дотичному розшаруванні до  $G/K$ ; таким чином, було розв'язано давно поставлену задачу класифікації комплексних однорідних редуктивних просторів складності один.

# Геометричне квантування: метод редукції та інваріантні келерові структури

В [95] розроблено метод геометричного квантування цілком інтегровних гамільтонових динамічних систем на многовидах з точною симплектичною структурою, який дає змогу описати спектр відповідної квантової системи в термінах групи характерів фундаментальної групи відкритого симплектичного підмноговиду, який визначається інтегралами системи.

Обчислення виконано в термінах змінних дія-кут, які є природними локальними змінними для цілком інтегровних динамічних систем в околі інваріантних торів. Це дає змогу побудувати структуру гільбертового простору на просторі узагальнених перерізів, горизонтальних відносно дійсної поляризації з особливостями, яку визначають інтеграли системи.

В [95] цей метод ефективно застосовано для квантування динамічної системи типу Неймана на двовимірній сфері і обчислення дискретного спектру та відповідних власних функцій квантової динамічної системи типу Неймана на двовимірній сфері.

# Алгебро-геометричні методи та їх ...

У працях авторів роботи

- вперше застосовано метод симплектичної редукції та відображення момента для обчислення ко-рангів інваріантних вироджених бі-гамільтонових структур, пов'язаних з сімейством симплектичних структур на многовиді з локально-вільною дією групи Лі симетрій  $G$ ;
- розроблено метод редукції, який дозволяє звести дослідження бі-гамільтонової структури на алгебрі  $G$ -інваріантних функцій на ко-дотичному розшаруванні однорідного простору групи Лі  $G$  до аналогічної задачі на многовиді з локально-вільною дією групи Лі  $G$  симетрій;
- розроблено новий метод побудови інваріантних поляризацій (структур Коші-Рімана) для геометричного квантування цілком інтегровних гамільтонових систем на підставі дослідження частот, які якісно описують траєкторію динамічної системи на інваріантних торах;
- застосовано метод гамільтонової редукції для побудови келерових структур на ко-дотичних розшаруваннях однорідних просторів груп Лі інваріантних відносно нормалізованого геодезичного потоку;
- застосовано метод гамільтонової редукції для класифікації гіпер-келерових структур на ко-дотичних розшаруваннях ермітових симетричних просторів компактних груп Лі.

# Якісно-аналітичні методи нескінченновимірного аналізу та їх застосування в квантовій теорії поля і статистичній механіці

Якісно-аналітичні методи математичної фізики, зокрема, ті, що пов'язанні з використанням сучасного функціонального аналізу і теорії операторів, широко використовуються при вивченні багатьох моделей сучасної фізики, зокрема, квантової теорії поля і статистичної механіки.

Ці методи отримують як свій подальший розвиток і мають важливе значення для загальної теорії методів математичної фізики на основі функціонального аналізу, так і знаходять широкі і важливі застосування при вивченні багатьох моделей фізики, зокрема, квантової теорії поля і статистичної механіки.

Цей напрям представлено в працях О.Л.Ребенка (монографії [1, 12, 16] та статті [35, 38, 50, 51, 64, 87, 121, 123, 124]).

До роботи включено його результати з теорії аналітичних методів нескінченновимірного аналізу та їх застосування в квантовій теорії поля і статистичній механіці.

# Якісно-аналітичні методи нескінченновимірного аналізу та їх застосування в квантовій теорії поля і статистичній механіці

Дослідження стосуються двох таких напрямів:

1. модельні системи квантової теорії поля та статистичної механіки;
2. аналітичні методи нескінченновимірного аналізу та їх застосування в статистичній механіці.

У працях О.Л.Ребенка розвинуто квантову теорію евклідової матриці розсіяння, рівноважну статистичну механіку нескінченних класичних систем з кулонівською взаємодією описано в рамках моделі евклідової квантової теорії поля і побудовано термодинамічний граничний перехід її фізичних характеристик. У цих працях також отримано нові результати математичних досліджень квантових систем ангармонічних кристалів.

# Якісно-аналітичні методи нескінченновимірного аналізу та їх застосування в квантовій теорії поля і статистичній механіці

Виведено рівняння для коефіцієнтних функцій матриці розсіяння основних моделей квантової теорії поля, побудовано евклідові поля та евклідові оператори дії і отримано розв'язки рівнянь у вигляді операторних рядів за степенями операторів дії, запропоновано операторний підхід до усунення ультрафіолетових розбіжностей, рівноважну статистичну механіку нескінченних класичних систем з кулонівською взаємодією описано в рамках моделі евклідової квантової теорії поля і побудовано термодинамічний граничний перехід її фізичних характеристик, отримано нові результати математичних досліджень квантових систем ангармонічних кристалів.

У працях О.Л.Ребенка, що стосуються другого напрямку, розвинуто аналіз білого шуму для складного процесу Пуассона, запропоновано нові кластерні розклади для кореляційних функцій для нескінченних статистичних систем точкових частинок, запропоновано модель коміркового газу, яка апроксимує відповідну неперервну систему при довільних значеннях термодинамічних параметрів.

# Імовірнісні методи в задачах спектральної теорії та на групах та їх застосування в математичній фізиці

В останні десятиріччя активно розвиваються дослідження на межі теорії ймовірностей, спектральної теорії та математичної фізики, де ідеї і методи теорії ймовірностей застосовуються для нетрадиційних структур, таких як групи, матриці, оператори, тощо. Це часто вимагає розвитку нового апарату та підходів, а також використання результатів з багатьох розділів математики.

У роботі представлено результати досліджень з двох актуальних напрямків математичної фізики та її застосувань, а саме:

- з теорії власних значень випадкових матриць великої розмірності,
- теорії групових аналогів класичних теорем арифметики імовірносних розподілів і характеристичних теорем математичної статистики.



# Імовірнісні методи в задачах спектральної теорії та на групах та їх застосування ...

Авторами роботи:

– доведено гіпотезу Дайсона універсальності локального розподілу власних значень  $\beta$ -матричних моделей з довільним  $\beta$ , що є однією з центральних проблем теорії випадкових матриць і має численні застосування як у фізиці, зокрема, для розвитку теорії струн і багатьох задач статистичної фізики, так і розвитку теорії ортогональних поліномів, комбінаторики, комплексного аналізу та інших розділів математики і фізики;

– вирішено низку важливих і принципових характеристичних задач математичної статистики на локально компактних абелевих групах.

Зокрема, детально вивчено групові аналоги класичної теореми

Скитовича-Дармуа, історія якої сягає до досліджень Максвелла про розподіл швидкостей руху молекул, побудовано теорію розкладань випадкових величин, які приймають значення в локально компактній абелевій групі і знайдено повний опис груп, на яких всі дільники розподілу Гауса є також розподілами Гауса, вивчено умови на скінченну міру, при виконанні яких узагальнений розподіл Пуассона, який породжується цією мірою, належить класу розподілів, які не мають ні ідемпотентних дільників, ні дільників, що не розкладаються.

# Публікація статей

Список наукових журналів, в яких опубліковано статті

Англомовні наукові журнали

1. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** (IF – 2,784; 5-Year Impact Factor: 2,936) – 1 стаття: [100]
2. **Communications in Mathematical Physics** (IF – 2,500) – 4 статті: [52, 119, 128, 130]
3. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment** (IF – 2,196) – 1 стаття [124]
4. **Journal of Differential Equations** (IF – 1,988; 5-Year IF – 2,222) – 1 стаття: [67]
5. **Probability Theory and Related Fields** (IF – 1,895) – 2 статті: [68, 69]
6. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical** (IF – 1,857) – 1 стаття: [63]
7. **Il Nuovo Cimento (at present – The European Physical Journal Plus)** (IF – 1,753) – 1 стаття: [95]
8. **Nonlinearity** (IF – 1,767) – 1 стаття: [110]
9. **Chaos, Soliton & Fractals** (IF – 1,455; 5-Year IF – 1,604) – 1 стаття: [55]
10. **Reviews in Mathematical Physics** (IF – 1,426) – 1 стаття: [121]
11. **Physica C** (IF – 1,404) – 1 стаття: [138]
12. **Journal of Statistical Physics** (IF – 1,349) – 11 статей: [50, 51, 65, 98, 120, 122, 129, 132, 133, 134, 135]

# Перелік англомовних наукових журналів, в яких опубліковані статті

13. **Compositio Mathematica** (IF – 1,312) – 1 стаття: [90]
14. **Journal of Functional Analysis** (IF – 1,254; 5-Year IF – 1,490) – 1 стаття: [71]
15. **Mathematics and Computers in Simulation** (IF – 1.218, 5-Year IF – 1.308) – 1 стаття: [127]
16. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications** (IF – 1,192; 5-Year IF – 1,353) – 4 статті: [86, 89, 97, 126]
17. **Journal of Mathematical Physics** (IF – 1,077; 5-Year IF – 1,143) – 11 статей: [78, 84, 85, 94, 111, 112, 114, 123, 125, 136, 137]
18. **Foundations of Physics** (IF – 1,067) – 1 стаття: [58]
19. **Journal of Mathematical Analysis and Applications** (IF – 1,064; 5-Year IF – 1,151) – 2 статті: [66, 80]
20. **Potential Analysis** (IF – 1,026) – 1 стаття: [83]
21. **Journal of Nonlinear Mathematical Physics** (IF – 0,986) – 3 статті: [54, 76, 77 ]
22. **International Journal of Theoretical Physics** (IF – 0,964) – 3 статті: [60, 107, 108]
23. **Journal of Multivariate Analysis** (IF – 0,901; 5-Year IF – 1,229) – 1 стаття: [73]

# Перелік англомовних наукових журналів, в яких опубліковані статті

24. **Journal of Theoretical Probability** (IF – 0,854) – 1 стаття: [74]
25. **Integral Equations and Operator Theory** (IF – 0,787) – 1 стаття: [82]
26. **Physics of Particles and Nuclei** (IF – 0,672) – 1 стаття
27. **Physics of Particles and Nuclei** (IF – 0,681) – 1 стаття: [59]
28. **Reports on Mathematical Physics** (IF – 0,604, 5-Year IF – 0,828) – 6 статей: [87, 88, 101, 113, 115, 116]
29. **Poisson geometry** (IF – 0,595) – 1 стаття: [96]
30. **Tohoku Mathematical Journal** (IF – 0,588) – 1 стаття: [79]
31. **Transformation Groups** (IF – 0,583) – 2 статті: [92, 93]
32. **Nagoya Mathematical Journal** (IF – 0,571) – 1 стаття: [91]
33. **Pacific Journal of Mathematics** (IF – 0,465) – 1 стаття: [81]
34. **Journal of Modern Physics** (IF – 0,43) – 1 стаття: [64]
35. **Journal of Physical Mathematics** – 1 стаття: [99]
36. **Mathematics** – 1 стаття: [62]
37. **Mathematische Nachrichten** – 2 статті: [72, 75]
38. **Nonlinear Vibration Problems** – 1 стаття: [118]
39. **Studia Mathematica** – 1 стаття: [70]
40. **Topology** – 1 стаття: [104]

# Перелік наукових журналів АН СРСР і РАН, в яких опубліковані статті

## Наукові журнали АН СРСР і РАН

1. Математический сборник (IF – 0,986; 5-Year IF – 0,835) – 3 статті [30, 31, 32]
2. Успехи математических наук (IF – 1,084; 5-Year IF – 1,169) – 1 стаття [38]
- Известия Российской АН. Серия математическая (IF – 0,833; 5-Year IF – 0,671) – 3 статті [25, 28, 29]
3. Теоретическая и математическая физика (IF – 0,810; 5-Year IF – 0,715) – 2 статті [18, 19]
4. Сибирский математический журнал (IF – 0,545) – 1 стаття [47]
5. Математические заметки (IF – 0,523; 5-Year IF – 0,436) – 1 стаття [23]
6. Доклады АН СРСР (IF – 0,472) – 3 статті [17, 20, 33]
7. Дифференциальные уравнения (IF – 0,371) – 2 статті [26, 27]
8. Теория вероятностей и ее применения (IF – 0,245) – 5 статей [44, 45, 46, 48, 49]

# Перелік наукових журналів України, в яких опубліковані статті

## Наукові журнали України

1. **Condensed Matter Physics** (IF – 0,882) – 2 статті: [53, 61]
2. **Український фізичний журнал** (IF – 0,367) – 2 статті: [21, 106]
3. **Український математичний журнал** (IF – 0,228) – 13 статей: [22, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 57, 103, 117]
4. **Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry** (IF – 0,205; 5-Year IF – 0,261) – 1 стаття: [131]
5. **Nonlinear Oscillations** (IF – 0,164) – 1 стаття: [105]
6. **Доповіді АН УРСР. Серія А** – 1 стаття: [24]

У квадратних дужках вказано номер статті згідно переліку наукових праць роботи, який подано в її описі.

## Дані про цитування праць претендентів

Прізвище, ініціали	Google Scholar	Scopus	WEB of Sciences
Кочубей А.Н.	2862	725	1290
Ребенко О.Л.	368	96	98
Микитюк І.В.	248	97	164
Прикарпатський А.К.	1123	327	473
Самойленко В.Г.	627	123	147
Фельдман Г.М.	947	241	381
Щербина М.В.	1621	583	811

## Дані про $h$ -індекс претендентів

Прізвище, ініціали	Google Scholar	Scopus	WEB of Sciences
Кочубей А.Н.	24	13	16
Ребенко О.Л.	13	6	8
Микитюк І.В.	8	6	6
Прикарпатський А.К.	18	8	10
Самойленко В.Г.	12	6	8
Фельдман Г.М.	18	10	10
Щербина М.В.	18	12	13

Дякуємо за увагу !